ОСНОВАНИЕ
благотворительный фонд

ОТЧЕТ

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ И УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕЙ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ СЛУЧАЙНОЙ ПРОДОЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

Автор: Дибров

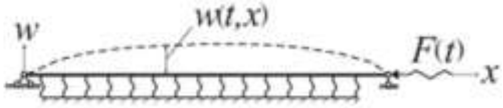
г. Москва
2013

Описание постановки и исследования:

Произведено компьютерное моделирование колебаний и исследование устойчивости прямолинейного шарнирно опёртого упругого стержня, лежащего на упругом нелинейном основании (без отлипания) под действием продольной случайной стационарной нагрузки. Дифференциальное уравнение движения в частных производных относительно функции прогибов приводится к обыкновенному нелинейному дифференциальному уравнению; численным методом находится его решение и исследуется устойчивость невозмущенного движения варьированием начальных возмущений (устойчивость по Ляпунову). За воздействие принимается продольная силовая нагрузка в виде периодической и периодической и стохастической составляющей. Продемонстрировано что при заданных значениях исходных параметров малое изменение в продольной силе, вызванное случайной добавкой, приводит к принципиальному изменению в поведении системы – неупорядоченное (хаотическое) при детерминированной постановке задачи колебание стержня становятся более упорядоченными (устойчивыми) при стохастической постановке задачи.

Процесс решения задачи:

Стержень, лежащий на сплошном нелинейно упругом основании.



$$m\ddot{w}+2k\dot{w}+EJw''''+F(t)w''+cw^3=0$$

Для определения функций $f_i(t)$ применяется метод Бубнова-Галеркина:

$$m\ddot{f}_i(t)+2k\dot{f}_i(t)+\frac{i^4\pi^4}{l^4}\,f_i(t)-F(t)\frac{i^2\pi^2}{l^2}\,f_i(t)+c\frac{2}{l}I_i=0$$

После введения безразмерных параметров:

$$\xi_i'' + 2\varepsilon\xi_i' + \left(\frac{\omega_i}{\omega_1}\right)^2 (1-\alpha_i)\xi_i + \beta I_i^* = 0 \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

Безразмерная продольная сила представляется в виде:

$$\alpha_1(\tau) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos\Theta\tau + \alpha^o(\tau)$$

$\alpha^o(\tau)$ - гауссовский случайный стационарный процесс с корреляционной функцией

$$K(\tau_1-\tau_2) = \sigma^2 e^{(-\delta|\tau_1-\tau_2|)}\left[\cos\theta(\tau_1-\tau_2) + \frac{\delta}{\theta}\sin\theta(\tau_1-\tau_2)\right]$$

и спектральной плотностью

$$S(\omega) = \frac{2\sigma^2\delta}{\pi}\frac{\delta^2+\theta^2}{(\omega^2-\theta^2-\delta^2)+4\delta^2\omega^2}$$

Такой стационарный процесс можно рассматривать как результат прохождения белого шума через линейный фильтр 2-го порядка.

Для анализа устойчивости решения системы уравнений (невозмущенное решение), рассматривают систему уравнений описывающих возмущенное движение системы, вызванное возмущением начальных условий $z_i = z_i + \delta z_i$.

Линеаризованные уравнения возмущенного движения в возмущениях:

$$\delta\xi_i'' + 2\varepsilon\delta\xi_i' + \left(\frac{\omega_i}{\omega_1}\right)^2 (1-\alpha_i)\delta\xi_i + \beta\delta I_i^* = 0$$

$$\delta I_i^* = \sum_n\sum_m\sum_q\sum_{k=1}^{8} a_k(\delta\xi_n\xi_m\xi_q + \xi_n\delta\xi_m\xi_q + \xi_n\xi_m\delta\xi_q),$$

$\beta = 0.11375$

Численное решение системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\delta y_i' = \delta y_{i+n}$$

Работа выполнена при поддержке фонда «Основание»

$$\delta y'_{i+n} = -2\varepsilon\delta y_{i+n} - \left(\frac{\omega_i}{\omega_1}\right)^2 (1-\alpha_i)\delta y_i - \beta\delta I_i^*, \quad (i=1,\ldots,n)$$

$$\delta y_i \equiv \delta\xi_i, \quad \delta y_{i+n} = \delta\xi'_i.$$

Под устойчивостью системы понимается устойчивость по отношению к возмущению начальных условий (устойчивость в смысле Ляпунова).

Рост вектора $\delta Y(\tau)$ может быть оценен с помощью максимального показателя Ляпунова, который определяется выражением:

$$\lambda = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \ln \frac{\| \delta Y(\tau) \|}{\| \delta Y(0) \|}$$

$$\| \delta Y(\tau) \| = \sqrt{\sum_{j=1}^{2n} \delta y_j^2(\tau)}, \quad \| \delta Y(0) \| = \sqrt{\sum_{j=1}^{2n} \delta y_j^2(0)}$$

<u>Численное моделирование:</u>

Исходные параметры:

$$\varepsilon = 0.1,\ \alpha_o = 0.5,\ \alpha_1 = 2.0,\ \Theta = \theta = 1.4,\ \sigma^2 = 0.01,\ \delta = 0.5,\ \Delta\tau = 0.1$$

Начальные условия:

$\xi_1(0) \equiv \xi_{01} = 1.0,\ \xi'_1(0) \equiv \xi'_{01} = 0$ при n=1

$\xi_{01} = 1.0,\ \xi_{02} = \ldots = \xi_{05} = 0,\ \xi'_{01} = 0,\ldots,\xi'_{05} = 0$ при n=5.

Результаты моделирования:

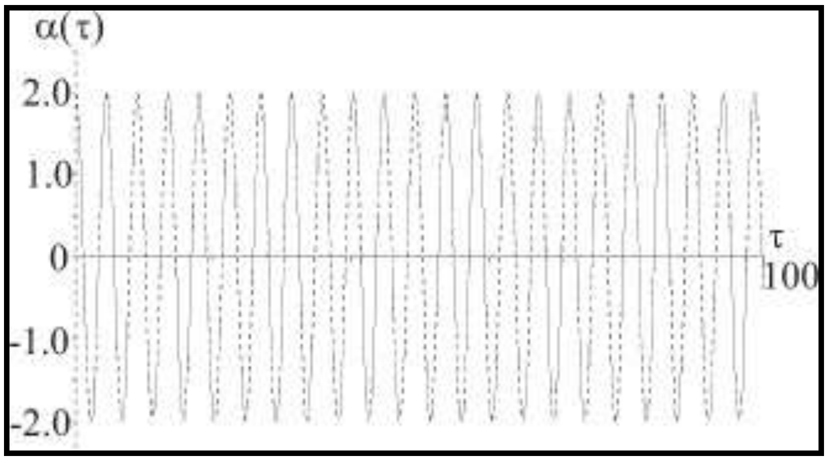


График изменения периодической составляющей $\alpha_1 \cos\Theta\tau$

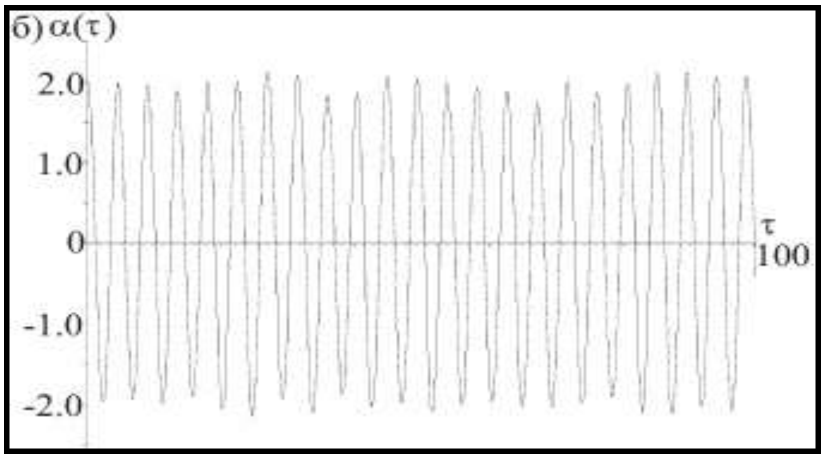
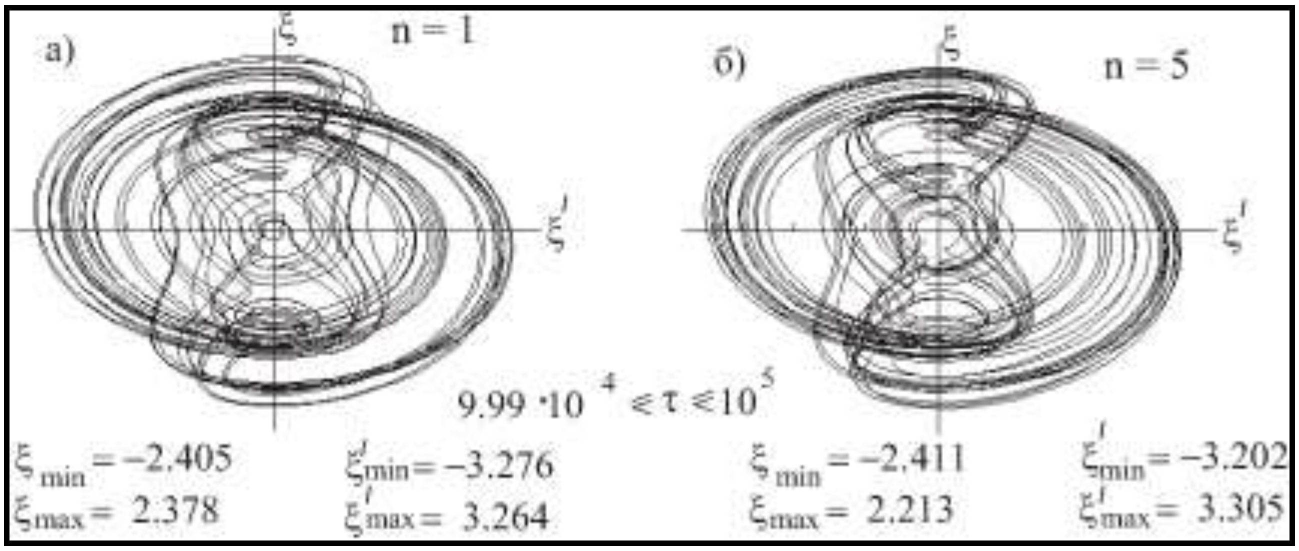


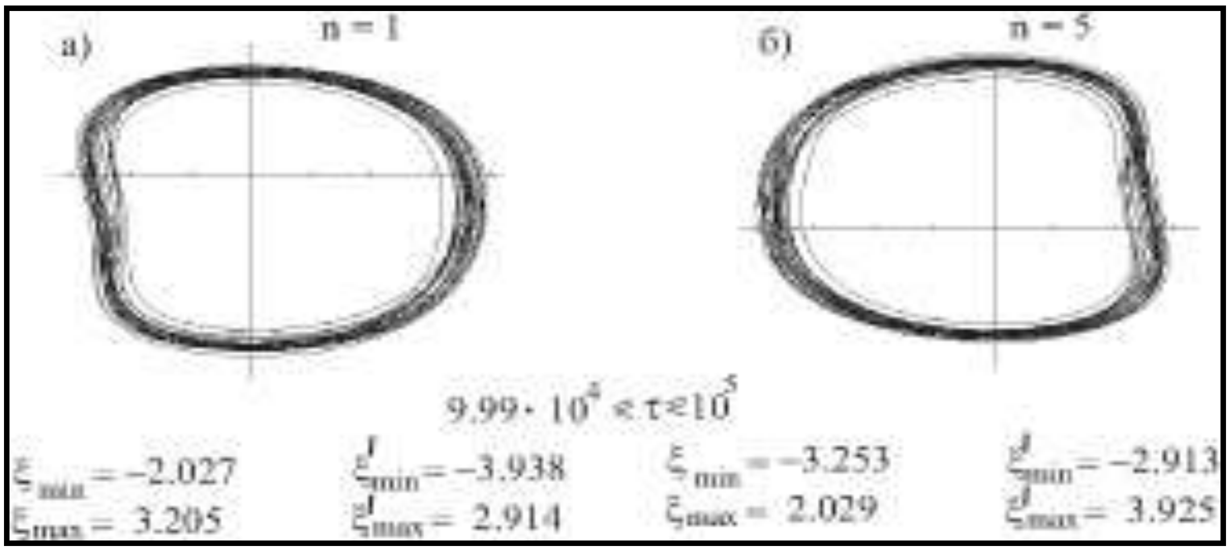
График изменения одной из реализаций случайной составляющей функции

$$\alpha_1 \cos\Theta\tau + \alpha^o(\tau)$$

Работа выполнена при поддержке фонда «Основание»



Изменение перемещения среднего сечения стержня на фазовой плоскости при ***детерминированной*** постановке задачи



Изменение перемещения среднего сечения стержня на фазовой плоскости при ***стохастической*** постановке задачи

$\theta = 1.4,\ \sigma^2 = 0.01,\ \delta = 0.5$.

Выводы и заключения, сделанные по результатам исследований:

Движение неустойчивой нелинейной детерминированной системы, находящаяся под воздействием параметрической нагрузки, может быть стабилизировано путем наложения на параметрическую нагрузку стохастической составляющей в виде гауссового широкополосного стационарного процесса, причем решение уравнения движения такой системы представляется в виде разложения по собственным формам соответствующей линеаризованной системы при различном числе членов в указанном разложении.