



# ОТЧЕТ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МГУПС МИИТ)

## РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ МОСТОВ НА СЕЙСМИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ

*Автор: Иванченко И.И.*

г. Москва  
2013

Изучение действия сейсмических нагрузок на мосты и эстакады относится к актуальным задачам динамики сооружений. Для мостов эти исследования объединяют два независимо развиваемых направления в познании поведения конструкций. С развитием методов расчета транспортных сооружений только на сейсмические воздействия связаны работы многих исследователей [1-14 и др.]. Методы расчета сооружений на действие инерционной подвижной нагрузки на протяжении большого периода времени получили свое развитие, в том числе в работах [15-28, 35 и др.]. В настоящем отчете предлагается численный метод исследования колебаний стержневых систем, моделирующих мосты на действие сейсмических нагрузок при наличии подвижной нагрузки на сооружениях. На первом этапе рассматривается метод расчета строительного сооружения, включая мосты, только на сейсмические воздействия, задаваемые акселерограммами, при использовании стержневых граничных элементов (ГЭ). Второй этап исследования включает разработку методики по оценке взаимодействия, при сейсмическом воздействии, пролетного строения моста и подвижной нагрузки в виде железнодорожного состава, въезжающего на мост.

Исторически расчеты по определению напряженно-деформированного состояния сооружения при сейсмических воздействиях, развивались, в основном, по двум направлениям, это, прежде всего, расчеты на основе спектрального метода [1-8 и др.], в основу которого положены оценки максимально возможных динамических усилий при использовании спектра собственных частот и форм колебаний сооружения, определяемых, в том числе, при использовании метода конечных элементов (МКЭ), и нормативных итоговых вычислений максимально возможных (по каждой форме колебаний) значений интегралов Дюамеля для узловой инерционной нагрузки, задаваемой возможными и инструментально полученными акселерограммами, при учете, через наборы коэффициентов, многих попутных факторов, характеризующих: сейсмичность района, вид конструкций и других характеристик [14]. В итоге, так как максимальные



усилия в элементах сооружения, соответствующие различным формам колебаний, реализуются в различные моменты времени, расчетные усилия в сечениях сооружения вычисляются по формуле среднеквадратичного осреднения [14]. Другое, дополнительное направление, это применение динамического метода расчета сооружений на сейсмические воздействия, включающее серии числовых экспериментов при математическом моделировании (на основе МКЭ или МГЭ) сооружения и получении результатов (динамических усилий и смещений) в зависимости от временной составляющей, при непосредственном использовании аселерограмм предшествующих землетрясений. Динамическая теория сейсмического расчета сооружений (второе направление) представлено, включая мостовые конструкции, в работах [1, 5, 9-13 и др.]. Так, в работах [5, 9, 10 и др.] рассмотрены вопросы определения напряженно деформированного состояния стержневых систем при использовании традиционных КЭ и граничных стержневых элементов. Можно отметить ряд работ [6, 7, 9, 10 и др.], связанных с мостами при действии на них только сейсмических воздействий. Представляет особый интерес отметить работы, где исследуется одновременное действие на мост как подвижной, так и сейсмической нагрузок, задаваемых аселерограммами. Так, в работе [11] рассмотрено вертикальное сейсмическое воздействие на опоры однопролетного стального висячего моста при движении по нему системы сосредоточенных сил. Для решения задачи в [11] используются тригонометрические ряды. В работе [12] при решении задачи применяется конечноэлементная дискретизация железнодорожных структур, в виде железнодорожного полотна как вне, так и на многопролетной эстакаде для высокоскоростного движения поездов при одновременном действии боковой сейсмической нагрузки и движущегося протяженного железнодорожного состава, состоящего из связанных между собой вагонов, моделируемых, каждый системой с 31 степенями свободы. При этом в статье рассмотрены специальные виброизолирующие системы и нелинейные упруго-вязкие элементы, регулирующие вибрации пути в

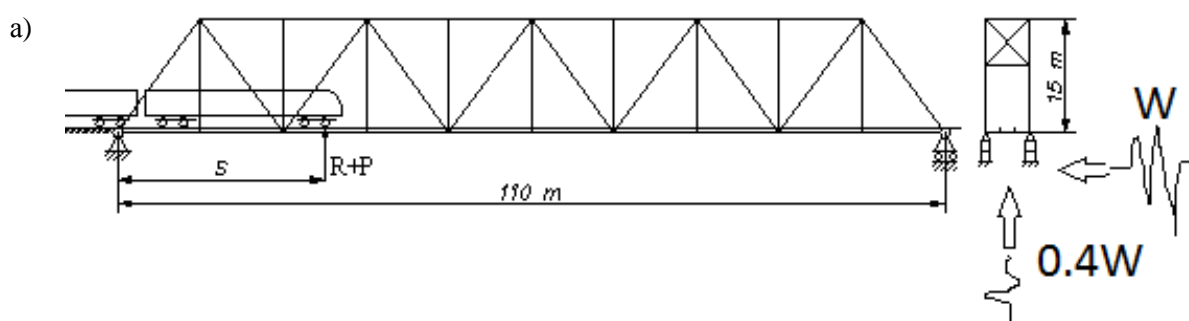
вертикальном и горизонтальном, поперечном для оси эстакады, направлениях. В работе [13] продолжены исследования [12], рассмотрена задача по конструированию элементов безопасности в виде защитных барьеров вдоль пути при сходе скоростного состава с рельсового пути в процессе боковых сейсмических воздействиях.

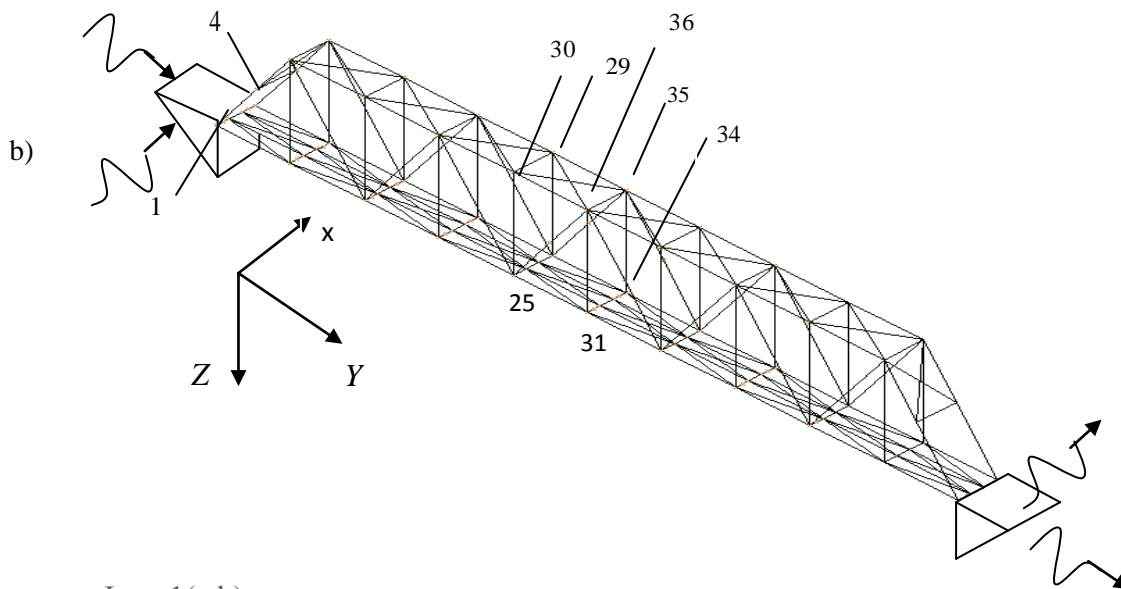
В основу предлагаемой методики, которая позволяет оценить динамические усилия в системе «состав-мост» при сейсмическом воздействии на мост, положены результаты предыдущих исследований по неустановившейся динамике стержневых и комбинированных систем [19, 23-26]. Использование граничных стержневых элементов и шаговой процедуры, предложенных в работах [19, 23], позволяют, решая динамическую задачу, существенно сокращать порядок разрешающих систем уравнений, описывающих движение сооружения (по сравнению с использованием традиционных КЭ), сохраняя возможность определения полей динамических усилий и смещений при использовании высокой степени пространственной дискретизации сооружения и смешанного метода строительной механики, положенного в основу указанного подхода к решению задачи. Так, в работе [19] рассмотрен метод расчета стержневых систем на силовые неустановившиеся воздействия, в работах [23, 25] предложен метод расчета стержневых и коробчатых систем на подвижную инерционную нагрузку. В настоящем отчете и статье [35] методика из [19, 23-25] расширена на случай сейсмических воздействий, задаваемых аселерограммами, на сооружения, моделируемые стержневыми системами. Рассматривается методика на конкретных примерах, не ограничивающих возможности подхода к решению проблемных задач. Привлекается для исследования случай, когда сейсмическому воздействию подвергнута мостовая ферма без подвижной нагрузки и в момент её появления на ферме.



**1. Мостовое пролетное строение** (железнодорожная ферма пролетом 110 м, проект № 3 501-31/75 фиг.1а,б) рассматривается как пространственная стержневая система с распределенными параметрами. Применяется метод декомпозиции для системы «мост - подвижная нагрузка» при рассмотрении в качестве последней железнодорожного состава.

Сохраняя обозначения, введенные в предыдущих исследованиях, введем пространственную дискретизацию мостовой фермы. Будем проводить нумерацию узлов системы, заканчивая общую нумерацию, узлами элементов проезжей части (продольных балок фермы). Расчленим стержневую систему, считая, что она состоит из  $\tilde{m}$  стержней большой длины и имеет  $n$  узлов. Для изучения колебаний стержневой систем применим, как и в [19, 23 - 26], теорию сложного движения для элементов стержневой системы. Введем правую глобальную систему координат  $OXYZ$ . Введем для каждого стержня правые местные системы координат  $\tilde{\delta}_h \tilde{x}_h \tilde{y}_h \tilde{z}_h$  ( $h=1, \dots, \tilde{m}$ ). Ось  $\tilde{y}_h$  направим от узла с порядковым номером  $\tilde{i}$  к узлу с номером  $k$ , при  $\tilde{i} < k$ . После декомпозиции стержневой системы по узлам, выделим из несущей конструкции подсистему  $\{e_h^*\}$  ( $h=1, \dots, m^*$ ), состоящую из  $m^*$  элементов проезжей части, и подсистему  $\{e_h\}$  ( $h=1, \dots, m$ ), состоящую из  $m = \tilde{m} - m^*$  элементов, не подверженных действию подвижной нагрузки. В итоге имеем систему  $\{e_h, e_h^*\}$ .





Фиг. 1(a,b)

Введем для каждого стержня правые подвижные системы координат  $\tilde{o}_{lh} \tilde{x}_{lh} \tilde{y}_{lh} \tilde{z}_{lh}$ . Начало подвижной системы координат  $\tilde{o}_{lh}$  свяжем с узлом  $\tilde{i}$ , а плоскость  $\tilde{o}_{lh} \tilde{x}_{lh} \tilde{z}_{lh}$  крутильно с сечением в узле  $\tilde{i}$ . Ось  $\tilde{y}_{lh}$  в каждый момент времени будем считать проходящей через узел  $k$ . Будем обозначать через  $\tilde{N}$  число дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих относительное движение стержневых элементов  $e_h$  и  $e_h^*$ . Введем для системы  $\{e_h, e_h^*\}$  поле узловых абсолютных, переносных и относительных линейных и угловых смещений, поле узловых усилий и моментов в концевых сечениях элементов. Рассмотрим следующие столбцы смещений и усилий с компонентами в местных системах координат, отнесенных к элементам  $e_h$  и  $e_h^*$ :  $\mathbf{q}^h = [\mathbf{q}_{\tilde{i}}^h, \mathbf{q}_k^h]^T$ ,  $\mathbf{q}_r^h = [\mathbf{q}_{r\tilde{i}}^h, \mathbf{q}_{rk}^h]^T$ ,  $\mathbf{q}_e^h = [\mathbf{q}_{e\tilde{i}}^h, \mathbf{q}_{ek}^h]^T$  – векторы линейных и угловых перемещений узлов  $\tilde{i}$  и  $k$  в абсолютном, относительном и переносном движениях;  $\tilde{\mathbf{q}}_r = [\tilde{\mathbf{q}}_r^1, \dots, \tilde{\mathbf{q}}_r^h, \dots, \tilde{\mathbf{q}}_r^m]^T$ ,  $\tilde{\mathbf{q}}_e = [\tilde{\mathbf{q}}_e^1, \dots, \tilde{\mathbf{q}}_e^h, \dots, \tilde{\mathbf{q}}_e^m]^T$  – векторы относительных и переносных обобщенных перемещений;  $\mathbf{f}^h = [\mathbf{f}_{\tilde{i}}^h, \mathbf{f}_k^h]^T$  – вектор усилий и моментов в узлах  $\tilde{i}$  и  $k$ ;  $\mathbf{p}^h = [p_1^h, \dots, p_{\tilde{n}}^h, \dots, p_6^h]^T$  ( $\tilde{n}=1, \dots, 6$ ) – вектор распределенных внешних сил и моментов, действующих на  $\{e_h, e_h^*\}$ ;  $\bar{\mathbf{f}} = [\bar{\mathbf{f}}^1, \dots, \bar{\mathbf{f}}^h, \dots, \bar{\mathbf{f}}^m]^T$  – вектор



узловых усилий для  $\{e_h, e_h^*\}$ ;  $\bar{\mathbf{q}} = [\mathbf{q}^1, \dots, \mathbf{q}^h, \dots, \mathbf{q}^m]$  – вектор узловых смещений для  $\{e_h, e_h^*\}$ ;  $\tilde{\mathbf{q}}_r^h = [\tilde{q}_{rk}^h] = [\tilde{q}_{r1}^h, \dots, \tilde{q}_{r\tilde{n}}^h]$  – вектор относительных перемещений любой точки  $e_h$  и  $e_h^*$ .

Рассмотрим векторы - столбцы с компонентами в основной системе координат при нумерации узлов  $\tilde{j}=1, \dots, n$ ;  $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{\tilde{j}}, \dots, \mathbf{q}_n]$  – вектор узловых перемещений;  $\mathbf{q}_s = [\mathbf{q}_{s1}, \dots, \mathbf{q}_{s\tilde{j}}, \dots, \mathbf{q}_{sn}]$  – вектор заданных узловых перемещений [34]. Будем полагать  $\mathbf{q}_{\tilde{i}}^h, \mathbf{q}_k^h, \mathbf{q}_{r\tilde{i}}^h, \mathbf{q}_{rk}^h, \mathbf{q}_{e\tilde{i}}^h, \mathbf{q}_{ek}^h, \mathbf{q}_{\tilde{j}}, \mathbf{f}_{\tilde{i}}^h, \mathbf{f}_k^h, \mathbf{q}_{s\tilde{j}}$  векторами с шестью составляющими, например  $\mathbf{q}_{\tilde{i}}^h = [q_{\tilde{i}1}^h, \dots, q_{\tilde{i}\tilde{n}}^h, q_{\tilde{i}6}^h]$ ,  $\mathbf{f}_{\tilde{i}}^h = [f_{\tilde{i}1}^h, \dots, f_{\tilde{i}\tilde{n}}^h, f_{\tilde{i}6}^h]$ . Как и в [19, 23], первые три компоненты в порядке возрастания  $\tilde{n}$  означают величины узловых смещений или, соответственно, узловых сил, направленных вдоль осей  $\tilde{x}_h, \tilde{y}_h, \tilde{z}_h$ , аналогично и в основной системе координат, следующие три компоненты - величины углов поворота узлов или, соответственно, узловых моментов относительно этих или параллельных осей. Модель железнодорожного пути под каждым колесом представим (фиг. 2) в виде вертикальных и горизонтальных упруго-вязких связей [17, 23, 27, 29], обозначая эти связи как систему элементов («колесо-рельс»)  $\{\tilde{e}_h\}$ ,  $h=1, \dots, \tilde{N}$ , где  $\tilde{N}=16$  для выбранной модели вагона.

Считая, что в момент времени  $t$  на  $e_h^*$  находится  $N_h^*$  колес, рассмотрим  $\mathbf{q}^{oh} = [q_{\tilde{k}_1}^{oh}]$ ,  $\tilde{\mathbf{P}}_1^h = [P_{1\tilde{k}_1}^h]$ ,  $\mathbf{R}^h = [R_{\tilde{k}_1}^h] (\tilde{k}_1 = 1, \dots, 2 \times N_h^*)$  – векторы столбцы, соответственно, вертикальных и горизонтальных смещений движущихся узлов для  $e_h^*$  (точек контакта  $\tilde{e}_h$  и  $e_h^*$ ), статических давлений, вертикальных динамических добавок для колесных пар и горизонтальных реакций движущихся колес, находящихся на  $e_h^*$ . Обозначим через  $\bar{\mathbf{q}}^o = [\mathbf{q}^{oh}]$  и  $\mathbf{R} = [\mathbf{R}^h]$  – векторы вертикальных и горизонтальных смещений движущихся узлов системы  $\{e_h^*\}$  и, соответственно, вектор динамических добавок к статическим давлениям колесных пар и горизонтальных реакций движущихся колес, действующих на  $\{e_h^*\}$ .

При учете затуханий по Фойгту для случая изгибных колебаний динамическая модель  $e_h$  и  $e_h^*$  в относительном движении выбирается, в виде шарнирно-опертой балки Эйлера, для продольных относительных (крутильных) колебаний выбирается модель стержня с одним заделанным (в узле  $i$ ) и другим свободным концами, соответственно, при аппроксимации смещений для  $\{e_h\}$  и  $\{e_h^*\}$  используются при описании переносного движения элементов линейные функции, а при относительном движении – конечные суммы тригонометрических функций. Введем в рассмотрение элементы («вагон-путь»)  $e_k^o$ ,  $k=1, \dots, n_v$ , объединяющие экипажи и железнодорожный путь, где  $n_v$  - число вагонов в составе. Будем считать, что начальные условия системы «состав-путь-мост»  $\{e_h, e_h^*, e_h^o\}$  нулевые, а параметры, определяющие положение  $\{e_k^o\}$  в системе  $O_*X_*Y_*Z_*$ , движущейся с составом с постоянной скоростью  $V$ , отсчитываются от их значений в статическом равновесии. Обозначим, далее, через  $\{e_k^{o*}\}$ ,  $k=1, \dots, n_v^*$  элементы  $\{e_k^o\}$ , вовлеченные на шаге  $[t_j, t_{j+1}]$  в совместные колебания с  $\{e_h, e_h^*\}$ ,  $h=1, \dots, \tilde{m}(m^*)$ , где  $n_v^*$  - число элементов (вагонов) в момент  $t_{j+1}$ .

Рассмотрим, как и в [23, 24], граничный элемент для подвижной нагрузки. Аппроксимацию смещений проводим, как отмечалось, используя линейные функции (для описания переносного смещения у  $\{e_h, e_h^*\}$ ) и набор тригонометрических функций (для описания относительных движений у  $\{e_h, e_h^*\}$ ). Представим компоненты вектора  $\tilde{\mathbf{q}}_r^h$  при  $\tilde{k}=1, \dots, 4$ , описывающего относительное движение, в виде

$$\tilde{\mathbf{q}}_{r\tilde{k}}^h = \sum_{i=1}^N \tilde{\mathbf{q}}_{r\tilde{k}i}^h \mathbf{W}_{\tilde{k}i}(\eta_1), \tilde{k}=1, \dots, 4, \quad \eta_1 = \tilde{y}_{1h} / \ell_h \quad (1.1)$$

где  $\tilde{\mathbf{q}}_{r\tilde{k}i}^h$  - обобщенные координаты (подвектор вектора  $\tilde{\mathbf{q}}_r^h$ );  $\mathbf{W}_{\tilde{k}i}(\eta_1) = \sin(r_i \eta_1)$ , - собственные функции изгибных при  $\tilde{k}=1, 3$  и  $r_i = \pi i$ , продольных при  $\tilde{k}=2$  (крутильных при  $\tilde{k}=4$ ) и  $r_i = (2i-1)\pi/2$  колебаний  $e_h$  и  $e_h^*$  в относительном движении;  $\ell_h$  - длина элемента;  $N$  - число членов ряда в (1.1).



**2. Метод исследования взаимодействия моста и подвижного состава,** предложенный в [23], использовался для исследования колебаний плоской модели рамного пролетного строения для определения критических скоростей движения составов при кинематическом возбуждении колебаний пролетного строения однотипной подвижной нагрузкой. При сейсмических воздействиях на мост и при движении по нему состава требуется (что является определяющим), кроме вертикальных, учет горизонтальных поперечных сил взаимодействия колесных пар и проезжей части моста, т.е. с системой элементов  $\{e_h^*\}$ . Как и в [19, 23], после декомпозиции системы «состав-мост» и далее пролетного строения на систему стержневых элементов большой длины, формируется общая для системы «состав-мост» система уравнений, начиная с системы уравнений для стержневого элемента. Заметим, что угловые малые перемещения в узлах при сложении обладают коммутативностью.

Система дифференциальных уравнений, описывающих движение  $e_h^*$  и  $e_h$ , может быть построена разными путями [19, 23], в том числе, используя метод кинетостатики и метод Галеркина. Так, для описания относительного движения элементов  $e_h$  и  $e_h^*$  используем уравнения поперечных, продольных и крутильных колебаний в форме:

для изгибных колебаний  $e_h^*(e_h)$

$$L_1 \tilde{q}_{r\tilde{k}}^h = \left( \partial \delta(\tilde{y}_{1h} - \tilde{c}) / \partial \tilde{c} \right) \Big|_{\tilde{c}=0} \varepsilon f_{\tilde{i}\tilde{n}}^h + \left( \partial \delta(\tilde{y}_{1h} - \tilde{c}) / \partial \tilde{c} \right) \Big|_{\tilde{c}=\ell_h} \varepsilon f_{k\tilde{n}}^h - m_h \left( \ddot{q}_{\tilde{i}\tilde{n}}^h + \tilde{y}_{1h} (\ddot{q}_{k\tilde{n}}^h - \ddot{q}_{\tilde{i}\tilde{n}}^h) / \ell_h \right) +$$

$$+ F_{\tilde{k}}^h(\tilde{y}_{1h}, t) + \sum_{i=1}^{N_h^*} \delta(\tilde{y}_h - c_i) [(R_{\tilde{k}i}^h + \tilde{P}_{1i}^h)], \quad (\tilde{k} = 1, 3)$$

(2.1)

для продольных (крутильных) колебаний  $e_h^*(e_h)$

$$L_2 \ddot{\tilde{q}}_{r\tilde{k}}^h = \delta(\tilde{y}_{1h} - \ell_h) f_{k\tilde{n}}^h - m_h \ddot{\tilde{q}}_{\tilde{n}}^h + F_{\tilde{k}}^h(\tilde{y}_{1h}, t) \quad (\tilde{k} = 2, 4) \quad (2.2)$$

$$L_1 = E_h J_{\tilde{k}h} (\partial^4 / \partial \tilde{y}_{1h}^4) + \mu_{\tilde{k}}^h E_h J_{\tilde{k}h} (\partial^5 / \partial \tilde{y}_{1h}^4 \partial t) + m_h (\partial^2 / \partial t^2) \quad (2.3)$$

$$L_2 = -k_1 (\partial^2 / \partial \tilde{y}_{1h}^2) - \tilde{\mu}_h k_1 (\partial^4 / \partial \tilde{y}_{1h}^3 \partial t) + k_2 (\partial^2 / \partial t^2) \quad (2.4)$$

где при продольных колебаниях ( $\tilde{k} = 2$ )  $k_1 = EF_h$ ,  $\tilde{\mu}_h = \mu_{1h}$ ,  $k_2 = m_h$ ; при крутильных колебаниях ( $\tilde{k} = 4$ )  $k_1 = G_h J_{\rho h}$ ,  $\tilde{\mu} = \mu_{2h}$ ,  $k_2 = \rho J_{\rho h}$ ;  $EJ_{\tilde{k}h} = EJ_{z,x}$ ;  $EF$ ;  $G_h J_{\rho h}$  – изгибные ( $\tilde{k} = 1, 3$ ) и осевые жесткости  $e_h$ ;  $\tilde{\mu}_h, \mu_{1h}, \mu_{2h}$  – коэффициенты, характеризующие затухания;  $m_h$  – погонная масса стержневого элемента;  $\rho_h$  – масса единицы объема  $e_h$ ;  $\rho_h J_{\rho h}$  – момент инерции единицы длины  $e_h$ ;  $\delta(\tilde{y}_{1h} - \ell_h)$  – дельта функция;  $F_{\tilde{k}}^h(\tilde{y}_{1h}, t)$  – внешняя нагрузка, не включающая подвижную;  $C_{i_1} = Vt - \tilde{c}_{i_1}$  – абсцисса колесной пары на элементе  $e_h^*$ ;  $\tilde{c}_{i_1}$  – расстояние определяющее положение колесной пары с номером  $i_1$  на элементе  $e_h^*$  в основной системе координат;  $P$  – статическое давление колеса на  $e_h^*$ ;  $R_{z,i_1}$  – динамическая добавка к статическому давлению  $P$  колеса на балку;  $R_{x,i_1}$  – горизонтальная динамическая реакция движущегося колеса. Заметим, что при  $\tilde{k} = 3$   $\varepsilon = 1$ ,  $\tilde{P}_{i_1}^h = P$  и  $R_{\tilde{k}i_1}^h = R_{z,i_1}$  и при  $\tilde{k} = 1$   $\varepsilon = -1$ ,  $\tilde{P}_{i_1}^h = 0$  и  $R_{\tilde{k}i_1}^h = R_{x,i_1}$ ,  $\varepsilon$  – коэффициент ориентации в выбранной системе отсчета при формировании узловых, сосредоточенных моментов.

Первая группа уравнений описывает переносное движение  $e_h^*(e_h)$  и формируется при использовании метода кинетостатики, т.е. составления 6 уравнений динамического равновесия (уравнений проекций и моментов), относительно осей, проходящих через центр масс недеформированного



стержня параллельно местной для стержня системе координат при учете узловых реакций, внешних воздействий на стержень, переносного и относительного полей сил инерции (аналогичный результат может быть получен после последовательного варьирования элементов вектора  $\tilde{\mathbf{q}}_e^h$  и применении общего уравнения динамики). В итоге получаем уравнения динамического равновесия для  $e_h^*(e_h)$  в переносном движении.

$$(2.5) \quad (\mathbf{H}^h)' \mathbf{f}^h - \mathbf{M}^h \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}^h + \int_0^1 \mathbf{s}_i^h \tilde{\mathbf{p}}^h d\eta - \int_0^1 \tilde{\mathbf{M}}^h \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_r^h d\eta_1 = \begin{cases} \prod_1 (\mathbf{R}^h + \tilde{\mathbf{P}}_1^h) & \text{для } e_h^* \text{ при } \tilde{k} = 2,4 \\ 0 & \text{для } e_h^* \text{ и } e_h^* \text{ при } \tilde{k} = 1,3 \end{cases}$$

где  $\mathbf{H}^h, \tilde{\mathbf{H}}^h$  – матрицы преобразования векторов  $\mathbf{q}_e^h = \mathbf{H}^h \tilde{\mathbf{q}}_e^h, \tilde{\mathbf{q}}_e^h = \tilde{\mathbf{H}}^h \mathbf{q}_e^h$  [19];  $\mathbf{q}_e^h$  – вектор, содержащий обобщенные координаты для  $e_h^*(e_h)$  как жесткого тела;  $\tilde{\mathbf{q}}_e^h$  – вектор, содержащий узловые обобщенные координаты для  $e_h^*(e_h)$  как жесткого тела;  $\mathbf{M}^h$  – диагональная матрица масс и моментов инерции, относительно главных и центральных осей  $e_h^*(e_h)$ , если в качестве компонент вектора  $\tilde{\mathbf{q}}_e^h$  выбрать смещение центра жесткого  $e_h^*(e_h)$  вдоль этих осей и повороты вокруг них;  $\prod_1, \mathbf{s}_i^h, \tilde{\mathbf{M}}^h$  – матрицы, отражают действие на  $e_h^*(e_h)$ , соответственно, давление колесных пар, нагрузки  $\tilde{\mathbf{p}}^h$  и относительных сил инерции.

Вторая группа уравнений для  $e_h^*(e_h)$  может быть получена, если использовать (1.1) и ортогональность собственных функций в (1.1) при разложении по ним в ряд правых частей уравнений (2.8) и (2.9) (аналогичный результат может быть получен после варьирования компонент вектора  $\tilde{\mathbf{q}}_e^h$  и применения общего уравнения динамики).

$$(2.6) \quad \ddot{\tilde{q}}_{r\tilde{k}i}^h + \mu_{\tilde{k}i}^h \omega_{h\tilde{k}i}^2 \dot{\tilde{q}}_{r\tilde{k}i}^h + \omega_{h\tilde{k}i}^2 \tilde{q}_{r\tilde{k}i}^h = \tilde{\eta}_{\tilde{k}i}^h \mathbf{f}^h + \tilde{\eta}_{\tilde{k}i}^h \dot{\mathbf{q}}_j^h + \int_0^1 \bar{\eta}_{\tilde{k}i}^h \tilde{\mathbf{p}}^h d\eta + \begin{cases} \bar{\eta}_{\tilde{k}}^h (\mathbf{R}^h + \tilde{\mathbf{P}}_1^h) & \text{для } e_h^* \text{ при } \tilde{k} = 1,3; \quad i = 1,2,\dots,N \\ 0 & \text{для } e_h^* \text{ при } \tilde{k} = 2,4 \text{ и } e_h^* \text{ при } \tilde{k} = 1-4 \quad i = 1,2,\dots,N \end{cases}$$

где  $\mu_{\tilde{k}i}^h$  – коэффициенты, учитывающие вязкость;  $\omega_{h\tilde{k}i}$  – круговая частота соответствующего вида колебаний  $e_h^*(e_h)$  в относительном движении, т.е.:  $\omega_{h\tilde{k}i} = (r_i^2 / \ell_h^2) \sqrt{E_h J_{\tilde{k}h} / m_h}$  при  $\tilde{k} = 1,3$ ,  $\omega_{h\tilde{k}i} = (r_i / \ell_h) \sqrt{E_h / \rho_h}$  при  $\tilde{k} = 2$ ,  $\omega_{h\tilde{k}i} = (r_i / \ell_h) \sqrt{G_h / \rho_h}$  при  $\tilde{k} = 4$ ;  $E_h, G_h$  – модули упругости материалов;  $J_{\tilde{k}h}$  – моменты инерции сечения;  $\bar{\eta}_{\tilde{k}i}^h, \tilde{\eta}_{\tilde{k}i}^h, \tilde{\tilde{\eta}}_{\tilde{k}i}^h, \bar{\bar{\eta}}_{\tilde{k}i}^h$  – матрицы, отражающие, соответственно, действие на элемент  $e_h^*(e_h)$ : при  $\tilde{k} = 1,3$  внешней нагрузки  $\tilde{p}^h$ , сосредоточенных моментов  $f_{\tilde{i}\tilde{n}}^h, f_{k\tilde{n}}^h$  ( $\tilde{n} = 4,6$ ), переносного поля сил инерции, выраженных через  $\ddot{q}_{\tilde{i}\tilde{n}}^h, \ddot{q}_{k\tilde{n}}^h$  ( $\tilde{n} = 1,3$ ); при  $\tilde{k} = 1,3$  боковых и, соответственно, вертикальных давлений колесных пар; при  $\tilde{k} = 2,4$  влияние продольной силы или крутящего момента  $f_{k\tilde{n}}^h$  ( $\tilde{n} = 2,5$ ) и переносного поля сил инерции, выраженного через  $\ddot{q}_{\tilde{i}\tilde{n}}^h$  ( $\tilde{n} = 2,5$ ).

Третья группа уравнений участвует в выполнении условий непрерывности перемещений в узлах граничных элементов для стержневой системы (т. е. в выполнении условий - абсолютное смещение в узлах  $i$  и  $k$  элемента  $e_h^*(e_h)$  в местной системе координат равно сумме переносного и относительного линейного или, соответственно, углового смещений, при этом угловое перемещение выражается в форме производной по  $\eta_1$  от соответствующего поперечного смещения стержня). В итоге для  $e_h^*(e_h)$  имеем

$$(\mathbf{E} - \mathbf{H}^h \tilde{\mathbf{H}}^h) \mathbf{q}^h = \mathbf{\Pi}^h \mathbf{q}_r^h \text{ для } e_h \text{ и } e_h^* \quad (2.7)$$

$$\mathbf{q}_r^h = [\tilde{\mathbf{q}}_r^h(0,t) \partial \tilde{\mathbf{q}}_r^h(0,t) / \partial \eta_1, \tilde{\mathbf{q}}_r^h(1,t) \partial \tilde{\mathbf{q}}_r^h(1,t) / \partial \eta_1]'$$

где  $\tilde{\mathbf{q}}_r^h(\eta_1, t)$  - вектор, который имеет компонентами только те и в том же порядке компоненты вектора  $\tilde{\mathbf{q}}_r^h(\eta_1, t) / \ell_h$ , которые являются поперечными



смещениями  $e_h^*$  ( $e_h$ ) в системе  $\tilde{0}_{1h} \tilde{x}_{1h} \tilde{y}_{1h} \tilde{z}_{1h}$ ;  $\mathbf{P}^h$  – матрица преобразования  $\mathbf{q}_r^h$  в  $\mathbf{q}_e^h$ ;  $\mathbf{E}$  – единичная матрица.

Четвертая группа уравнений обеспечивает непрерывность деформаций в точках контакта подвижной нагрузки и  $e_h^*$ .

$$\mathbf{q}^{oh} = \mathbf{q}_e^{oh} + \mathbf{q}_r^{oh} \quad \text{для} \quad e_h^* \quad (2.8)$$

где  $\mathbf{q}_e^{oh}$  и  $\mathbf{q}_r^{oh}$  – векторы переносных и относительных вертикальных и поперечных смещений точек контакта элемента «вагон-путь» и проезжей части моста.

Очевидно, что для исследования движения системы «состав-путь» необходимо добавить к системе уравнений (2.5-2.8) уравнения движения подвижного состава и условия, которые связывают разъединенные, на первом этапе, стержневые элементы в единую систему, моделирующую мост, однако это удобней сделать далее, на этапе дискретизации общей системы уравнений по времени.

Проведем дискретизацию системы уравнений (2.1-2.8) по времени, вводя сетку целых  $t_j$  и половинных  $t_{j+1/2}$  узлов. Как и в [23-26], для решения задачи применяется шаговая процедура для решения задач динамики и статики (на первом шаге интегрирования), предложенная в [19]. На следующем этапе в статье, эта процедура, после ее модификации и тестирования в [24] используется для решения нелинейных задач.

После применения шаговой процедуры дискретный аналог указанных групп уравнений (2.5)-(2.8) на шаге  $[t_j, t_{j+1}]$  имеет вид

$$\left(\mathbf{H}^h\right) \mathbf{f}_{j+1/2}^h - \mathbf{M}^h \ddot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{q}}_{j+1/2}^h + \int_0^1 \mathbf{s}_1^h \tilde{\mathbf{p}}_{j+1/2}^h d\eta - \int_0^1 \tilde{\mathbf{M}}^h \ddot{\mathbf{q}}_{rj+1/2}^h d\eta_1 = \begin{cases} \Pi_1(\mathbf{R}_{j+1/2}^h + \tilde{\mathbf{P}}_1^h) & \text{для } e_h^* \text{ при } \tilde{k} = 2,4 \\ 0 & \text{для } e_h^* \text{ и } e_h^* \text{ при } \tilde{k} = 1,3 \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_{r\tilde{k}ij+1}^h + \mu_{\tilde{k}i}^h \omega_{h\tilde{k}i}^2 \dot{\mathbf{q}}_{r\tilde{k}ij+1}^h + \omega_{h\tilde{k}i}^2 \tilde{\mathbf{q}}_{r\tilde{k}ij+1}^h = \tilde{\mathbf{q}}_{\tilde{k}i}^h \mathbf{f}_{j+1}^h + \tilde{\mathbf{q}}_{\tilde{k}i}^h \dot{\mathbf{q}}_{j+1}^h + \int_0^1 \tilde{\mathbf{q}}_{\tilde{k}i}^h \tilde{\mathbf{p}}_{j+1}^h d\eta +$$

$$+ \begin{cases} \bar{\eta}_{\tilde{k}} (\mathbf{R}_{j+1}^h + \tilde{\mathbf{P}}_1^h) & \text{для } e_h^* \text{ при } \tilde{k} = 1, 3; \quad i = 1, 2, \dots, N \\ 0 & \text{для } e_h^* \text{ при } \tilde{k} = 2, 4 \text{ и } e_h^* \text{ при } \tilde{k} = 1-4 \quad i = 1, 2, \dots, N \end{cases}$$

(2.10)

$$(\mathbf{E} - \mathbf{H}^h \tilde{\mathbf{H}}^h) \mathbf{q}_{j+1}^h = \mathbf{\Pi}^h \mathbf{q}_{r,j+1}^h \text{ для } e_h \text{ и } e_h^*$$

$$\mathbf{q}_{r,j+1}^h = [\tilde{\mathbf{q}}_r^h(0, t), \partial \tilde{\mathbf{q}}_r^h(0, t) / \partial \eta_1, \tilde{\mathbf{q}}_r^h(1, t), \partial \tilde{\mathbf{q}}_r^h(1, t) / \partial \eta_1]'$$

(2.11)

$$\mathbf{q}_{j+1}^{oh} = \mathbf{q}_{e_{j+1}}^{oh} + \mathbf{q}_{r,j+1}^{oh} \quad \text{для} \quad e_h^*$$

(2.12)

$$\mathbf{q}_{j+1}^h = \mathbf{q}_j^h + \dot{\mathbf{q}}_j^h \Delta t_j + \ddot{\mathbf{q}}_{j+1/2}^h \Delta t_j^2 / 2, \quad \dot{\mathbf{q}}_{j+1}^h = \dot{\mathbf{q}}_j^h + \ddot{\mathbf{q}}_{j+1/2}^h \Delta t_j$$

(2.13)

$$\tilde{\mathbf{q}}_{r,j+1}^h = \tilde{\mathbf{q}}_{r,j}^h + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{r,j}^h \Delta t_j + \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_{r,j+1/2}^h \Delta t_j^2 / 2, \quad \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{r,j+1}^h = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{r,j}^h + \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_{r,j+1/2}^h \Delta t_j$$

(2.14)

$$\mathbf{q}_{j+1}^{oh} = \mathbf{q}_j^{oh} + \dot{\mathbf{q}}_j^{oh} \Delta t_j + \ddot{\mathbf{q}}_{j+1/2}^{oh} \Delta t_j^2 / 2, \quad \Delta t_j = t_{j+1} - t_j$$

(2.15)

Пятая группа уравнений (2.13-2.15) в представленной выше системе уравнений демонстрирует изменения векторов  $\mathbf{q}^h, \dot{\mathbf{q}}^h, \tilde{\mathbf{q}}_r^h, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r^h, \mathbf{q}^{oh}$  на шаге  $[t_j, t_{j+1}]$ .

В работах [19, 23] представлено решение уравнения (2.6) для  $e_h^* (e_h)$  на шаге  $[t_j, t_{j+1}]$  в форме

$$\tilde{\mathbf{q}}_{r\tilde{k},j+1}^h = \sum_{i=1}^N W_{\tilde{k}i}(\eta_1) \tilde{\mathbf{q}}_{r\tilde{k},i,j+1}^h = \sum_{i=1}^N W_{\tilde{k}i}(\eta_1) \{ (1 - \mathcal{G}_{\tilde{k}ij}^h \omega_{h\tilde{k}i}^2) \tilde{\mathbf{q}}_{r\tilde{k},ij}^h +$$

$$+ (\Delta t_j - \mathcal{G}_{\tilde{k}ij}^h \omega_{h\tilde{k}i}^2 (\mu_{\tilde{k}}^h - \frac{1}{2} \Delta t_j)) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{r\tilde{k},ij}^h + \mathcal{G}_{\tilde{k}ij}^h (\tilde{\eta}_{\tilde{k}i}^h \mathbf{f}_{j+1/2}^h + \tilde{\eta}_{\tilde{k}i}^h \ddot{\mathbf{q}}_{j+1/2}^h + \int_0^1 \bar{\eta}_{\tilde{k}i}^h \mathbf{p}_{j+1/2}^h d\eta +$$

$$+ \begin{cases} \bar{\eta}_{\tilde{k}} (\tilde{\mathbf{R}}_{j+1/2}^h + \tilde{\mathbf{P}}_1^h) \} & \text{для } e_h^* \text{ при } \tilde{k} = 1, 3; \\ 0 \} & \text{для } e_h^* \text{ и } e_h^* \text{ при } \tilde{k} = 2, 4 \end{cases}$$

(2.16)

$$\mathcal{G}_{\tilde{k}ij}^h = (\Delta t_j^2 / 2) \tilde{\mathbf{a}}_{\tilde{k}ij}^h, \quad \mu_{\tilde{k}}^h = \mu_{\tilde{k}i}^h$$



$$\tilde{a}_{\tilde{k}ij}^h = 1 / \left( 1 + \frac{1}{2} \omega_{h\tilde{k}i}^2 (\mu_{\tilde{k}}^h \Delta t_j + \Delta t_j^2 / 2) \right)$$

Для пространственного стержневого элемента, детализируя векторы  $\mathbf{f}^h$  и  $\mathbf{q}^h$ , можно записать в виде

$$\mathbf{f}^h = [\mathbf{f}_{\tilde{i}}^h \mathbf{f}_k^h]' = [F_{\tilde{x}\tilde{i}}^h N_{\tilde{y}\tilde{i}}^h F_{\tilde{z}\tilde{i}}^h M_{\tilde{x}\tilde{i}}^h M_{\tilde{x}\tilde{i}}^h M_{\tilde{x}\tilde{i}}^h F_{xk}^h N_{yk}^h F_{zk}^h M_{xk}^h M_{xk}^h M_{xk}^h]' \quad (2.17)$$

$$\mathbf{q}^h = [\mathbf{q}_{\tilde{i}}^h \mathbf{q}_k^h]' = [w_{\tilde{x}\tilde{i}}^h w_{\tilde{y}\tilde{i}}^h w_{\tilde{z}\tilde{i}}^h \theta_{\tilde{x}\tilde{i}}^h \theta_{\tilde{x}\tilde{i}}^h \theta_{\tilde{x}\tilde{i}}^h w_{xk}^h w_{yk}^h w_{zk}^h \theta_{xk}^h \theta_{xk}^h \theta_{xk}^h]' \quad (2.18)$$

где  $F_{\tilde{z}\tilde{i}}^h M_{\tilde{x}\tilde{i}}^h$ ,  $\theta_{xk}^h w_{xk}^h$  - узловые поперечные и продольные усилия и моменты, смещения и углы поворота узлов  $\tilde{i}, k$  элемента  $e_h^*$ .

Объединение уравнений (2.9) и (2.11), с учетом (2.16) и (2.12-2.15), приводит к системе для  $e_h$  в виде

$$\mathbf{A}^h \mathbf{f}_{j+1/2}^h + \mathbf{B}^h \ddot{\mathbf{q}}_{j+1/2}^h = \mathbf{C}^h \quad (2.19)$$

где,  $\mathbf{A}^h = [A_{ik}^h]$ ,  $\mathbf{B}^h = [B_{ik}^h]$  - квадратные матрицы с размерами  $[12 \times 12]$ ,  $\mathbf{C}^h$  - вектор с размером  $[12 \times 1]$ . Базовые формулы для элементов указанных матриц  $\mathbf{A}^h$ ,  $\mathbf{B}^h$ , приведены в [19].

Учет действия подвижной инерционной нагрузки приводит к формированию завершающей для  $e_h^*$  группы уравнений. Используется, как и в [23], выражение для ускорения груза, движущегося по балке с постоянной скоростью  $V$ ,

$$\ddot{q}_{z,j+1/2}^{oh} = \frac{\partial^2 u(Vt,t)}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 u(Vt,t)}{\partial t \partial y} + V^2 \frac{\partial^2 u(Vt,t)}{\partial y^2} \quad (2,20)$$

где  $u(y,t)$  - вертикальный прогиб балки;  $y$  - координата по длине балки.

Ускорения на шаге  $[t_{j+1}, t_j]$  в момент  $t = t_{j+1/2}$  точек контакта (с номером  $\tilde{k}_1$ ) подвижной нагрузки с элементом  $e_h^*$ , при использовании (2.16) и

(2.20), в вертикальном (при  $\tilde{k} = 3$ ) и горизонтальном, поперечном (при  $\tilde{k} = 1$ ) направлениях, имеют вид [23]

$$\begin{aligned}
 \ddot{q}_{A, \tilde{k}_1, j+1/2}^{oh} &= \ddot{q}_{\tilde{r}[1]_{j+1/2}}^h + ((C_{\tilde{k}_1} / \ell_h) + V \Delta t_j / \ell_h) (\dot{q}_{k[1]_{j+1/2}}^h - \dot{q}_{\tilde{r}[1]_{j+1/2}}^h) + \\
 &2V \left( \dot{q}_{k[1]_j}^h - \dot{q}_{\tilde{r}[1]_j}^h \right) / \ell_h + \\
 &+ \varepsilon f_{\tilde{r}[6]_{j+1/2}}^h \sum_{i=1}^N \tilde{a}_{\tilde{k}_1 i}^h b_{1i}^h \beta_{1i \tilde{k}_1}^h + \varepsilon f_{k[6]_{j+1/2}}^h \sum_{i=1}^N \tilde{a}_{\tilde{k}_1 i}^h (-1)^i b_{1i}^h \beta_{1i \tilde{k}_1}^h - \\
 &- \dot{q}_{\tilde{r}[1]_{j+1/2}}^h \sum_{i=1}^N \tilde{a}_{\tilde{k}_1 i}^h b_{2i}^h \beta_{1i \tilde{k}_1}^h + \dot{q}_{k[1]_{j+1/2}}^h \sum_{i=1}^N \tilde{a}_{\tilde{k}_1 i}^h (-1)^i b_{2i}^h \beta_{1i \tilde{k}_1}^h + \sum_{k_1=1}^{N_h^*} (R_{A, k_1}^{j+1/2} + \rho P_{1k_1}) \times \\
 &\times \left\{ \tilde{b}_h \sum_{i=1}^N \tilde{a}_{\tilde{k}_1 i}^h \beta_{1i \tilde{k}_1}^h S_{i k_1} \right\} - \sum_{i=1}^N \beta_{1i \tilde{k}_1}^h \tilde{a}_{\tilde{k}_1 i}^h \omega_{h \tilde{k}_1}^2 \left[ \tilde{q}_{r \tilde{k}_1 i}^h + (\mu_{\tilde{k}}^h + \Delta t_j / 2) \dot{\tilde{q}}_{r \tilde{k}_1 i}^h \right] + \\
 &+ \sum_{i=1}^N \{ \beta_{2i \tilde{k}_1}^h \dot{\tilde{q}}_{r \tilde{k}_1 i}^h + \beta_{3i \tilde{k}_1}^h \tilde{q}_{r \tilde{k}_1 i}^h \} \quad (\varepsilon = 1 \text{ при } \tilde{k} = 3, \varepsilon = -1 \text{ при } \tilde{k} = 1)
 \end{aligned}$$

(2.21)

где  $b_{1i}^h = 2r_i / (m_h \ell_h^2)$ ,  $b_{2i}^h = 2 / r_i$ ,  $\tilde{b}_h = 2 / (m_h \ell_h)$

$$\beta_{1i \tilde{k}_1}^h = S_{i \tilde{k}_1} \left( 1 - V^2 (r_i / \ell_h)^2 \Delta t_j^2 / 4 \right) + \Delta t_j V (r_i / \ell_h) \bar{S}_{i \tilde{k}_1}$$

$$\beta_{2i \tilde{k}_1}^h = 2V (r_i / \ell_h) \bar{S}_{i \tilde{k}_1} - V^2 (r_i / \ell_h)^2 (\Delta t_j / 2) S_{i \tilde{k}_1}$$

$$\beta_{3i \tilde{k}_1}^h = -V^2 (r_i / \ell_h)^2 S_{i \tilde{k}_1}, \quad S_{i \tilde{k}_1} = \sin(r_i C_{\tilde{k}_1} / \ell_h), \quad \bar{S}_{i \tilde{k}_1} = \cos(r_i C_{\tilde{k}_1} / \ell_h)$$

$$r_i = \pi i \quad (\tilde{k}_1 = 1, \dots, N_h^*)$$

Отметим, что в (2.16) верхнее значение в обозначении индекса в  $\begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \end{bmatrix}$  соответствует вертикальным смещениям, нижнее – горизонтальным. Будем далее заменять индекс  $A$  на  $z$ , полагая  $\rho = 1$  при  $\tilde{k} = 3$ , и индекс  $A$  на  $x$ , полагая  $\rho = 0$  при  $\tilde{k} = 1$ .

Учитывая тот факт, что в качестве подвижной нагрузки будут рассмотрены четырехосные вагоны, введем векторы

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{f}}^h &= [\mathbf{f}^h, \mathbf{R}^h]', & \tilde{\mathbf{q}}^h &= [\mathbf{q}^h, \mathbf{q}^{oh}]'
 \end{aligned}$$

(2.22)



$$\mathbf{R}^h = [R_{z1}^h, R_{x1}^h, R_{z2}^h, R_{x2}^h, \dots, R_{xd}^h, R_{zd}^h]', \quad \mathbf{q}^{oh} = [q_{z1}^{oh}, q_{x1}^{oh}, q_{z2}^{oh}, q_{x2}^{oh}, \dots, q_{xd}^{oh}, q_{zd}^{oh}]', \quad d = N_h^* \quad (2.23)$$

Объединение уравнений (2.9), (2.11) и (2.16) с учетом (2.16) и (2.12-2.15), как и в [23], приводит к системе уравнений для  $e_h^*$

$$\tilde{\mathbf{A}}^h \tilde{\mathbf{f}}_{j+1/2}^h + \tilde{\mathbf{B}}^h \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_{j+1/2}^h = \tilde{\mathbf{C}}^h \quad (2.24)$$

где  $\tilde{\mathbf{A}}^h = [\tilde{A}_{ik}^h]$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}^h = [\tilde{B}_{ik}^h]$  - квадратные матрицы с размерами  $[N_1 \times N_1]$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}^h$  - вектор, при  $N_1 = 12 + 2 \times N_h^*$ . Базовые формулы для элементов указанных матриц  $\tilde{\mathbf{A}}^h$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}^h$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}^h$  при  $\tilde{k} = 1, \dots, 4$  и  $\varepsilon = \pm 1$  в (2.24) приведены в [23].

Объединим элементы в единую систему, несущую конструкцию, и сформируем разрешающую систему для  $\{e_h, e_h^*\}$  на шаге  $[t_{j+1}, t_j]$ .

Для всех стержневых элементов  $\{e_h, e_h^*\}$  системы (2.19) (2.24) преобразуем к виду

$$\mathbf{f}_{j+1/2}^h = -\mathbf{K}_h \dot{\mathbf{q}}_{j+1/2}^h + \tilde{\mathbf{K}}_h \quad (2.25)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_{j+1/2}^h = -\mathbf{K}_h \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_{j+1/2}^h + \tilde{\mathbf{K}}_h^* \quad (2.26)$$

Объединение выражений (2.25) и (2.26) для системы  $\{e_h, e_h^*\}$   $h=1, \dots, \tilde{m}(m^*)$  приводит к системе уравнений на шаге  $[t_j, t_{j+1}]$

$$\bar{\mathbf{f}}_{j+1/2}^* = -\bar{\mathbf{K}}^* \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{j+1/2}^* + \bar{\mathbf{K}}^* \quad (2.27)$$

где  $\bar{\mathbf{f}}^* = [\bar{\mathbf{f}}, \mathbf{R}]'$  - вектор узловых силовых факторов, динамических добавок к статическим давлениям колес для системы  $\{e_h, e_h^*\}$  и динамических горизонтальных реакций в местных системах координат;  $\mathbf{R} = [\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^2, \dots, \mathbf{R}^{m^*}]'$  - вектор вертикальных динамических добавок к статическим реакциям колес и горизонтальных динамических реакций колес состава;  $\ddot{\bar{\mathbf{q}}}^* = [\ddot{\bar{\mathbf{q}}}, \ddot{\bar{\mathbf{q}}}' ]'$  - вектор

узловых ускорений и ускорений в движущихся узлах системы  $\{e_h, e_h^*\}$  в местных системах координат;  $\bar{\mathbf{K}}^*$ ,  $\tilde{\mathbf{K}}^*$  - блочная, квадратная матрица и, соответственно, вектор.

3. Рассмотрим случай, когда на мост действует подвижная нагрузка в виде железнодорожного состава. Будем считать, что состав  $\{e_r^o\}$  состоит из вагонов (фиг. 2(а), не связанных между собой. Введем, первоначально, характеристики элементов  $\tilde{e}_h$ - «колесо-путь», моделирующих вертикальные  $k_{z3}$  ( $\gamma_{z3}$ ) и поперечные горизонтальные  $k_{x3}$  ( $\gamma_{x3}$ ) жесткости (вязкости) пути на мосту и в предмостовых зонах.

Вектор динамических реакций  $\tilde{\mathbf{R}}_r$  проезжей части моста на колеса вагона с номером  $r$  представим в виде

$$\tilde{\mathbf{R}}_r = \mathbf{k}_{1o}^r (\mathbf{q}_{1o}^r - \mathbf{q}_{cw}^r) + \mathbf{e}_{1o}^r (\dot{\mathbf{q}}_{1o}^r - \dot{\mathbf{q}}_{cw}^r) \quad (3.1)$$

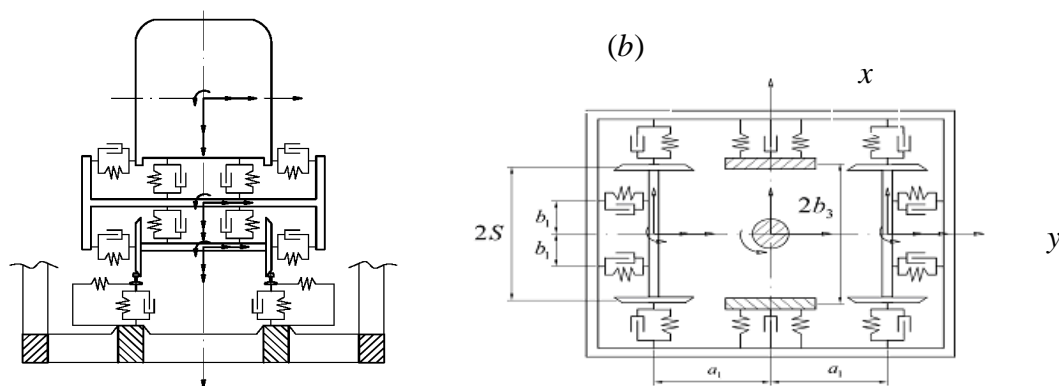
$$\tilde{\mathbf{R}}_r = [\tilde{R}_{rz1}, \tilde{R}_{rx1}, \tilde{R}_{rz2}, \tilde{R}_{rx2}, \dots, \tilde{R}_{rz8}, \tilde{R}_{rx8}]', \quad \mathbf{k}_{1o}^r = \text{diag}(k_{z3}, k_{x3}, k_{z3}, k_{x3}, \dots, k_{z3}, k_{x3})$$

$$\mathbf{e}_{1o}^r = \text{diag}(\gamma_{z3}, \gamma_{x3}, \gamma_{z3}, \gamma_{x3}, \dots, \gamma_{z3}, \gamma_{x3})$$

где  $\tilde{\mathbf{R}}_r$  - вектор, с размером  $[16 \times 1]$ , сил взаимодействия между  $e_r^o$  и пролетным строением (насыпью предмостового полотна);  $\mathbf{k}_{1o}^r, \mathbf{e}_{1o}^r$  - диагональные матрицы жесткости и вязкости с размером  $[16 \times 16]$  для пути под вагоном с номером  $r$ ;  $\mathbf{q}_{cw}^r$  - вектор вертикальных и горизонтальных поперечных смещений точек контакта колес вагона с номером  $r$  через  $\tilde{e}_h$  с рельсовым путем (с системой движущихся с колесом элементов «колесо-путь»);  $\mathbf{q}_{1o}^r = [q_{1o,i}^r]$  - вектор вертикальных и горизонтальных поперечных смещений точек контакта элементов «колесо - путь» с проезжей частью моста (элементами  $e_h^*$ ) или внемостовым полотном. Очевидно, что в любой момент времени элементы  $\mathbf{q}_{1o}^r$ , относящиеся к проезжей части вне моста остаются нулевыми при отсутствии сейсмической нагрузки и заданными виброграммами при сейсмических воздействиях. Заметим, что в местах



контакта подвижного состава (элементов  $\tilde{e}_h$ ) с мостом имеем  $q_{10i}^r = \tilde{q}_k^o = w_z^h(C_{\tilde{k}_1}, t)$  (для  $i=4(d-1)+1$  и  $i=4(d-1)+3$  для колесных пар с номером  $d$  при  $d=1, \dots, 4$ ) и  $q_{10i}^r = \tilde{q}_k^o = w_x^h(C_{\tilde{k}_1}, t)$  (для  $i=4(d-1)+2$  и  $i=4(d-1)+4$  для колесных пар при  $d=1, \dots, 4$ ), полагая, что  $k=i+16 \times (r-1)$ ,  $r=1, \dots, n_v^*$ .



Фиг 2(a,b)

Объединим векторы  $\mathbf{q}_{10}^r$  при  $r=1, \dots, n_v$ , обеспечивая неразрывность смещений между проезжей частью (продольными балками) и подвижным составом, в итоге имеем

$$\mathbf{q}_{10} = [\bar{\mathbf{q}}_{S1} \bar{\mathbf{q}}_0 \bar{\mathbf{q}}_{S2}]' = \tilde{\mathbf{q}}^o, \quad (k=1, \dots, N^*) \quad (3.2)$$

где  $\mathbf{q}_{10} = [\mathbf{q}_{10}^r]$  - вектор-столбец перемещений подвижных узлов продольных балок и перемещений во внестовых зонах при  $N_1^* = 16 \times n_v$ ;  $\tilde{\mathbf{q}}^o = [\tilde{q}_k^o]$  ( $k=1, \dots, N_1^*$ ) - вектор-столбец перемещений подвижных узлов продольных балок при общей нумерации подвижных узлов в соответствии с расположением колесных пар, начиная с головы состава;  $\bar{\mathbf{q}}_{S1}, \bar{\mathbf{q}}_{S2}$  - векторы заданных смещения при сейсмической нагрузке ( $\bar{\mathbf{q}}_{S1} = \bar{\mathbf{q}}_{S2} = 0$  при отсутствии сейсмической нагрузки);  $\bar{\mathbf{q}}_0$  - вектор перемещений проезжей части.

Применяется далее, как и в [25], для формирования уравнений колебаний вагона, метод кинетостатики, разбивается система, моделирующая вагон, на колесные пары, тележки и кузов, для каждой из частей записываются уравнения динамического равновесия, исключаются реакции, после декомпозиции систем с учетом упругой вязкости связей между частями

системы, условий неразрывности и совместности деформации в системе элементов вагона. В итоге, для вагона с номером  $r$  записывается система уравнений [25]

$$\mathbf{M}^r \ddot{\mathbf{q}}_c^r + \mathbf{C}^r \dot{\mathbf{q}}_c^r + \mathbf{K}^r \mathbf{q}_c^r = \mathbf{R}_c^r, \quad r=1, \dots, n_v \quad (3.3)$$

$\mathbf{M}^r$ ,  $\mathbf{C}^r$ ,  $\mathbf{K}^r$  - матрицы масс, демпфирования и жесткости для элемента «вагон»  $\tilde{e}_r^0$  с размерами  $[31 \times 31]$ ;  $\mathbf{q}_c^r$  - блочный вектор обобщенных смещений для вагона (кузова, тележек и колесных пар)

Дополним систему уравнений (3.3) системой уравнений (3.1), в итоге имеем для элемента «вагон-путь»  $e_r^0$

$$\tilde{\mathbf{M}}^r \ddot{\mathbf{q}}_v^r + \tilde{\mathbf{C}}^r \dot{\mathbf{q}}_v^r + \tilde{\mathbf{K}}^r \mathbf{q}_v^r = \tilde{\mathbf{R}}_v^r + \tilde{\mathbf{Y}}_0^r, \quad r=1, \dots, n_v \quad (3.4)$$

где  $\tilde{\mathbf{M}}^r = [\tilde{\mathbf{M}}_{ik}^r]$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}^r = [\tilde{\mathbf{C}}_{ik}^r]$ ,  $\tilde{\mathbf{K}}^r = [\tilde{\mathbf{K}}_{ik}^r]$  ( $i, k = 1, 2$ )-матрицы масс, демпфирования и жесткости для элемента «вагон-путь»  $e_r^0$  с размерами  $[47 \times 47]$ ;  $\tilde{\mathbf{R}}_v^r = [\tilde{\mathbf{R}}_r, 0]^T$  - блочный вектор с размером  $[47 \times 1]$ , состоящий из сил взаимодействия между составом и мостом и нулевым подвектором;  $\tilde{\mathbf{Y}}_0^r = [\mathbf{Y}_0^r, 0]^T$  - вектор с размером  $[47 \times 1]$ , который характеризует неровности рельсового пути;  $\mathbf{q}_v^r = [\mathbf{q}_{1o}^r, \mathbf{q}_c^r]^T$  - вектор, состоящий из обобщенных координат для  $e_r^0$ , сформированный из векторов, определенных в (3.1) и (3.3).

Элементы подматриц  $\tilde{\mathbf{M}}_{ik}^r, \tilde{\mathbf{C}}_{ik}^r, \tilde{\mathbf{K}}_{ik}^r$  ( $i, k = 1, 2$ ) для системы «вагон-путь» (фиг. 2( а,б)) приведены в [25], где учет односторонних горизонтальных связей введен через коэффициенты  $D_i^R$  и  $D_i^L$ , соответственно для правого и левого колеса с номерами реакций  $i$ . Это условие, дано в форме

$$D_i^R = \begin{cases} 0 & \text{при } \tilde{R}_{xi} \geq 0, \\ 1 & \text{при } \tilde{R}_{xi} < 0 \end{cases}, i = 2(k-1) + 2, \quad D_i^L = \begin{cases} 1 & \text{при } \tilde{R}_{xi} \geq 0, \\ 0 & \text{при } \tilde{R}_{xi} < 0 \end{cases}, i = 2(k-1) + 2, \quad k = 1, 2, \dots, 4 \quad (3.5)$$

Устройство железнодорожного пути предусматривает существование зазора  $2 \times \tilde{\Delta}$ , определенного традиционным отклонением

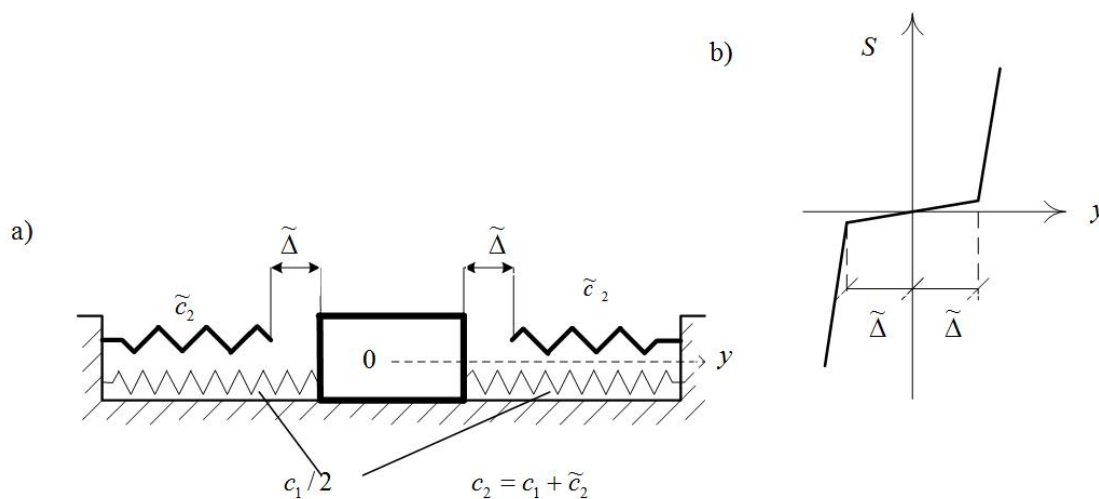


ширины колеи пути от ширины колесной пары [30], что сопровождается в процессе движения вагона влиянием колесных пар. При сейсмических воздействиях будем пренебрегать силами крива [30], и будем рассматривать поперечное проскальзывание колесных пар (за счет присутствия зазора) с последующими, последовательными ударами реборд колес о головки рельс. В этом случае условие (3.1) заменяется нелинейной связью, моделирующей поперечное проскальзывание колесной пары и столкновение её реборд колес с препятствием в форме головок правого или левого рельсов. Применяется шаговая процедура для решения нелинейных задач, предложенная в [24]. Приведем решение тестовой и вспомогательной задачи, на которой продемонстрируем предлагаемый алгоритм. Рассмотрим уравнение вида

$$(3.6) \quad m \ddot{y} + S(y) = 0, \quad y(0) = a_0, \quad \dot{y}(0) = 0$$

где  $m$  - масса,  $S(y)$  - восстанавливающая сила (фиг. 3(a,b)), при  $y = \lambda$ ,  $c_1 \ll c_2$ ),  $y$  - смещение,  $t$  - время;

$$(3.7) \quad S(\lambda) = \begin{cases} c_1 \lambda & \text{при } -\tilde{\Delta} \leq \lambda \leq \tilde{\Delta} \\ c_1 \lambda + c_2 (\lambda - \tilde{\Delta}) & \text{при } \lambda > \tilde{\Delta} \\ c_1 \lambda + c_2 (\lambda + \tilde{\Delta}) & \text{при } \lambda < -\tilde{\Delta} \end{cases}$$



Фиг. 3(a,b)

После дискретизации задачи по времени, вводя сетку целых  $t_j$  и половинных  $t_{j+1/2}$  узлов, имеем, в соответствии с [24]

$$(m + \tilde{c} \frac{\Delta t_j^2}{4}) \ddot{y}_{j+1/2} = -\tilde{c} y_j - \tilde{c} \frac{\Delta t_j}{2} \dot{y}_j + \begin{cases} 0 & \text{при } -\tilde{\Delta} \leq \lambda \leq \tilde{\Delta}, \tilde{c} = c_1 \\ \tilde{\Delta}(c_1 - c_2) & \text{при } \lambda > \tilde{\Delta}, \tilde{c} = c_2 \\ \tilde{\Delta}(c_1 + c_2) & \text{при } \lambda < -\tilde{\Delta}, \tilde{c} = c_2 \end{cases}$$

(  $j = 0, 1, 2, 3, \dots$  )

$$\dot{y}_{j+1} = \dot{y}_j + \ddot{y}_{j+1/2} \Delta t_j, \quad y_{j+1} = y_j + \dot{y}_j \times \Delta t_j + (1/2) \ddot{y}_{j+1/2} \Delta t_j^2$$

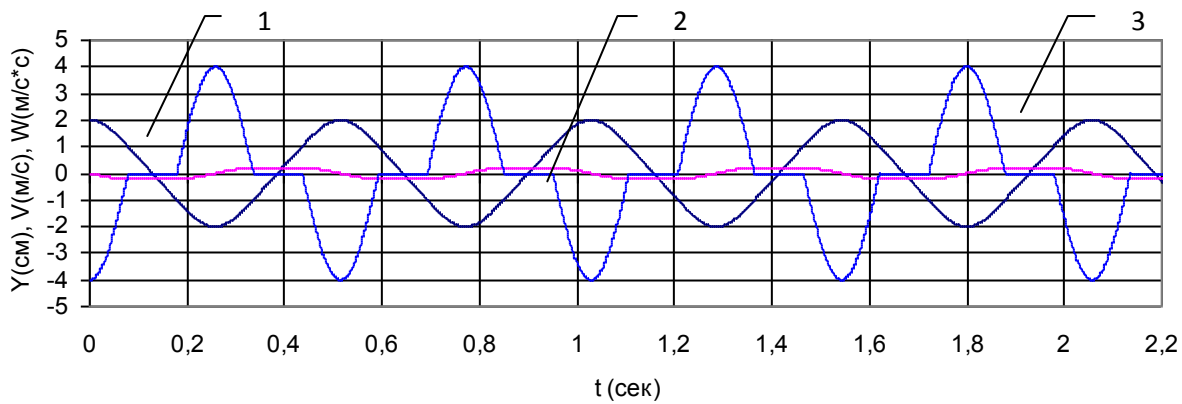
( 3.8 )

Рассматривается пример (фиг. 3(a)), тестирующий методику, при исходных данных:  $m=100\text{кг}$ ;  $c_1=0.0001\text{Н/м}$ ;  $\tilde{c}_2=40000\text{ Н/м}$ ;  $\tilde{\Delta}=1\text{см}$ ;  $a_0=2\text{см}$ ;  $N=2200$ ;  $\Delta t_j=0.001\text{с}$ , где  $N$  число шагов при численном интегрировании. На фиг. 4 представлены результаты численного решения уравнения (3.6) при условиях (3.7), т. е. представлены изменения в зависимости от времени смещения  $Y$  (см) (линия 1), скорости  $V$  (м/с) (линия 2) и ускорения груза  $W$  (м/с<sup>2</sup>) (линия 3). Следует отметить, что период колебаний, представленных на фиг.4, примерно, равен  $T=2.06/4=0.516\text{с}$ , а тот же период, вычисленный, с использованием, например, закона сохранения энергии, равен

$$T = 4 \left( \frac{\tilde{\Delta}}{V_0} + \frac{T_c}{4} \right), \text{ где } V_0 = \omega(a_0 - \tilde{\Delta}), \quad T_c = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \omega = \sqrt{\frac{c_2}{m}},$$

что составляет  $T=0.514\text{с}$ . Аналогичный результат можно получить, используя [33].





Фиг. 4

Вернемся к системе уравнений (3.4), проведем дискретизацию задачи, применяя шаговую процедуру [19,23], но с учетом нелинейной связи (3.7)

При решении рассматриваемой задачи, с присутствием зазоров  $2 \times \Delta$ , элементы подматриц  $\tilde{\mathbf{M}}_{ik}^r, \tilde{\mathbf{C}}_{ik}^r, \tilde{\mathbf{K}}_{ik}^r$  ( $i, k = 1, 2$ ) в (3.4), для системы «вагон-путь» (фиг. 2(a,b)) претерпевают изменения. Уравнения, описывающие поперечное смещение, например, первой колесной пары, первой тележки, учитывая, что  $c_2 \gg c_1 \approx 0$  и применяя методику составления системы из [25] (метод кинетостатики, после декомпозиции системы «вагон-путь»), формируют уравнения (динамического равновесия в проекции на ось  $ox$  (фиг. 2(b))) в виде

$$M_{W1} \ddot{X}_{W1} + \gamma_{x1} \dot{\eta} + k_{x1} \eta + S(\lambda) = 0 \quad (3.9)$$

$$-S(\lambda) = \bar{D}_i^R \tilde{\mathbf{R}}_{rx1} + \bar{D}_i^L \tilde{\mathbf{R}}_{rx2} \quad (3.10)$$

где  $\eta = X_{W1} - h_1 \varphi_{ty1} + a_1 \varphi_{tz1}$ ,  $\lambda = X_{W1} + r \varphi_{Wy1} - \bar{D}_1^R q_{1o2}^r - \bar{D}_1^L q_{1o4}^r$

$$\bar{D}_1^R = \begin{cases} 1 & npi & \lambda_{1j} = (X_{W1} + r \varphi_{Wy1} - q_{1o2}^r)_j > 0, & \lambda_{1j} > \tilde{\Delta} \\ 0 & & npi & -\tilde{\Delta} < \lambda_{1j} < \tilde{\Delta} \end{cases}$$

$$\bar{D}_1^L = \begin{cases} 1 & npi & \lambda_{1j} < 0, & |\lambda_{1j}| > \tilde{\Delta} \\ 0 & & npi & -\tilde{\Delta} < \lambda_{1j} < \tilde{\Delta} \end{cases}$$

где  $M_{w1}$  - масса колесной пары;  $k_{x i} (\gamma_{x i})$  - поперечная жесткость (вязкость) между колесной парой и тележкой ( $i=1$ ), боковая жесткость рельса ( $i=3$ );  $X_{w1}, \varphi_{Ay1}, \varphi_{Az1}$  - линейные и угловые смещения центров масс и, соответственно, повороты вокруг осей  $y, z$ , проходящих через центр масс колесной пары (при  $A=W$ ), тележки (при  $A=t$ );  $h_1$  - размер, определяющий конструкцию вагона (фиг. 2(a));  $2 \times a_1$  - расстояние между колесными парами у тележки (фиг. 2(b));  $S(\lambda)$  - поперечные реакции взаимодействия колесной пары и рельсов (в соответствии с (3,7)).

После дискретизации системы (3.9) на шаге  $[t_j, t_{j+1}]$  в момент  $t_{j+1/2}$ , можно записать

$$M_{w1} \ddot{X}_{w1 j+1/2} + \gamma_{x1} \dot{\eta}_{j+1/2} + k_{x1} \eta_{j+1/2} + S_{j+1/2}(\lambda) = 0 \quad (3.11)$$

$$-S_{j+1/2}(\lambda) = \tilde{R}_{rxi j+1/2} \quad (i=1,2) \quad (3.12)$$

В соответствии с шаговой процедурой [24]

$$\eta_{j+1/2} = \eta_j + \dot{\eta}_j (\Delta t_j / 2) + \ddot{\eta}_{j+1/2} (\Delta t_j^2 / 4), \quad \dot{\eta}_{j+1/2} = \dot{\eta}_j + \ddot{\eta}_{j+1/2} (\Delta t_j / 2) \quad (3.13)$$

$$S_{j+1/2}(\lambda) = \tilde{c} \lambda_j + \tilde{c} \lambda_j \frac{\Delta t_j}{2} + \tilde{c} \ddot{\lambda}_{j+1/2} \frac{\Delta t_j^2}{4} - m_k \ddot{q}_{1ok} + \begin{cases} 0 \text{ при } -\tilde{\Delta} \leq \lambda \leq \tilde{\Delta}, \tilde{c} = c_1, k = 2,4 \\ \tilde{\Delta}(c_1 - c_2) \text{ при } \lambda > \tilde{\Delta}, \tilde{c} = c_2, k = 2 \\ \tilde{\Delta}(c_1 + c_2) \text{ при } \lambda < -\tilde{\Delta}, \tilde{c} = c_2, k = 4 \end{cases} \quad (3.14)$$

где  $c_2 = k_{x3} \gg c_1$ ,  $m_k$  - фиктивная масса, в точке контакта элемента «колесо-рельс» с пролетным строением ( $m_k \ll M_{w1}$ ).

Заметим, что после подстановки (3.13), (3.14) в (3.11) и (3.12) формируется система уравнений на шаге  $[t_j, t_{j+1}]$ , входящих в (3.4), которая единообразно вкладывается и совпадает со случаем формирования линейной системы, но при замене, когда  $\lambda > \tilde{\Delta}$  и  $\lambda < -\tilde{\Delta}$ , жесткости  $c_1$  (используемой для моделирования скольжения колесной пары при зазоре) на жесткость



препятствия  $c_2 = k_{x3}$  (поперечную жесткость закрепленного рельса), с появлением слагаемых (расположенных за фигурной скобкой в (3.14)) в элементах в правой части линейной системы, соответствующих колесным парам вагона в системе (3.4).

Таким образом, применяемая шаговая процедура, единообразно расширяется для решения нелинейных задач, в частности для задач, как и в [24], с зазором. Это позволяет при  $c_2 \gg c_1$  в (3.4) моделировать присутствие зазора  $2 \times \tilde{\Delta}$ . Изменение жесткости (3.1) на (3.7) при формировании (3.4) позволяет определять горизонтальные динамические реакции при контакте реборд колесной пары с рельсами на пролетном строении в момент бокового сейсмического воздействия на мост.

Для решения системы (3.4) с учетом (3.7), применим, как и в [23], шаговую процедуру, предложенную в [19, 23]. В итоге имеем на шаге  $[t_j, t_{j+1}]$  ( $j=0, 1, 2, \dots$ ).

$$\ddot{\mathbf{q}}_{v_{j+1/2}}^r = \left( \tilde{\mathbf{k}}^r \right)^{-1} \left( -\tilde{\mathbf{K}}^r \mathbf{q}_{v_j}^r - \tilde{\mathbf{B}}^r \dot{\mathbf{q}}_{v_j}^r + \tilde{\mathbf{R}}_{v_{j+1/2}}^r + \tilde{\mathbf{Y}}_{o_{j+1/2}}^r \right) \quad (3.15)$$

$$\mathbf{q}_{v_{j+1}}^r = \mathbf{q}_{v_j}^r + \dot{\mathbf{q}}_{v_j}^r \Delta t_j + \ddot{\mathbf{q}}_{v_{j+1/2}}^r \frac{\Delta t_j^2}{2}, \quad \dot{\mathbf{q}}_{v_{j+1}}^r = \dot{\mathbf{q}}_{v_j}^r + \ddot{\mathbf{q}}_{v_{j+1/2}}^r \Delta t_j$$

$$\tilde{\mathbf{k}}^r = \tilde{\mathbf{M}}^r + \tilde{\mathbf{C}}^r \frac{\Delta t_j}{2} + \tilde{\mathbf{K}}^r \frac{\Delta t_j^2}{2}, \quad \tilde{\mathbf{B}}^r = \tilde{\mathbf{C}}^r + \tilde{\mathbf{K}}^r \frac{\Delta t_j}{2}, \quad \tilde{\mathbf{Y}}_{o_{j+1/2}}^r = [\mathbf{Y}_{o_{j+1/2}}^r, 0]^T$$

Выделим из (3.6) подсистему для  $\mathbf{q}_{1o}^r$  и  $\tilde{\mathbf{R}}_{r_{j+1/2}}^r$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{r_{j+1/2}}^r = \mathbf{d}_1^r \ddot{\mathbf{q}}_{1o_{j+1/2}}^r + \mathbf{d}_2^r - \mathbf{Y}_{o_{j+1/2}}^r \quad (3.16)$$

Матрицы  $\mathbf{d}_1^r, \mathbf{d}_2^r$  приведены в [25].

Объединим выражения (3.7) для  $\{e_k^o\}$  и выделим для  $\{e_k^{o*}\}$  на шаге  $[t_j, t_{j+1}]$  из этой системы подсистему для векторов  $\mathbf{q}_1^o$  и  $\tilde{\mathbf{R}}^o$  в виде

$$\tilde{\mathbf{R}}_{j+1/2}^o = \mathbf{W}^o \ddot{\mathbf{q}}_{1j+1/2}^o + \mathbf{L}^o \quad (3.17)$$

где  $\mathbf{W}^o$  и  $\mathbf{L}^o$  - блочно-диагональная матрица с размером  $[2N^* \times 2N^*]$  и вектор с размером  $[2N^* \times 1]$ ;  $N^* = N_1^* + N_2^* + \dots + N_m^*$  - число точек контакта подвижного состава с пролетным строением в момент времени  $t_{j+1}$ ;  $\mathbf{q}_1^o$  - вектор смещений точек контакта  $\{e_k^{o*}\}$  с  $\{e_h^*\}$ ;  $\tilde{\mathbf{R}}^o$  - вектор вертикальных динамических добавок к статическим реакциям  $P_{Ik} = P$  и горизонтальных реакций колес вагонов при их взаимодействии с пролетными строениями. Матрицы  $\mathbf{W}^o$  и  $\mathbf{L}^o$  по своему назначению совпадают с аналогичными матрицами в [23].

4. Сформируем разрешающие системы уравнений для расчета сооружения на сейсмическое воздействие. Рассмотрим случай действия только сейсмической нагрузки на мост. Воспользуемся условиями равновесия в узлах системы  $\{e_h, e_h^*\}$ , тогда на шаге  $[t_{j+1}, t_j]$  имеем [19, 34]

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{\Gamma}) \bar{\mathbf{f}}_{j+1/2} = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

где  $\mathbf{\Gamma}$  - матрица соединения векторов  $\bar{\mathbf{q}}$  и  $\mathbf{q}$  ( $\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{q}$ );  $\mathbf{E}_1$  - диагональная, вспомогательная матрица для учета граничных условий [19, 34]. Учтем граничные условия для стержневой системы на шаге  $[t_{j+1}, t_j]$  в форме

$$\mathbf{E}_2 \ddot{\mathbf{q}}_{j+1/2} = (\mathbf{q}_{s_{j+1}} - \mathbf{q}_{s_j} - \dot{\mathbf{q}}_{s_j} \Delta t_j) \delta_j \quad (4.2)$$

где  $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E} - \mathbf{E}_1$  - диагональная, вспомогательная матрица [34].



Уравнение (4.2) для случая сейсмических нагрузок запишем в виде

$$\mathbf{E}_2 \ddot{\mathbf{q}}_{j+1/2} = \ddot{\mathbf{q}}_{Sj+1/2}, \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

(4.3)

где  $\ddot{\mathbf{q}}_{Sj+1/2}$  - ускорение задаваемое акселерограммой. Начальные условия задачи, при этом, могут быть получены, используя инструментальные записи акселерограмм.

Объединяя уравнения (2.25) в систему  $\bar{\mathbf{f}}_{j+1/2} = \bar{\mathbf{K}} \ddot{\mathbf{q}}_{j+1/2} + \bar{\mathbf{K}}$ , подставим это выражение в (4.1), после объединения результата с (4.3) получим разрешающую систему в виде  $\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_{j+1/2} = \tilde{\mathbf{M}}(\ddot{\mathbf{q}}_{Sj+1/2}, t_{j+1/2}), (j = 0, 1, 2, \dots)$

(4.4)

где  $\mathbf{M}$  - матрица с размером  $\tilde{N}_0 \times \tilde{N}_0$  жесткостных, диссипативных и инерционных характеристик системы  $\{e_h, e_h^*\}$  на шаге  $[t_{j+1}, t_j]$  ( $\tilde{N}_0 = 6n$ );  $\tilde{\mathbf{M}}$  - вектор, отражающий влияние на шаге  $[t_{j+1}, t_j]$  начальных условий задачи в момент  $t_j$  и внешних воздействий, включая сейсмические. Заметим, что структура матрицы  $\mathbf{M}$  не меняется при  $j = 0, 1, 2, \dots$ , поэтому при решении системы (4.4) достаточно один раз вычислить  $\mathbf{M}^{-1}$ , что существенно сокращает временные затраты при решении задачи.

Рассмотрим случай действия на мост, систему  $\{e_h, e_h^*\}$ , одновременно сейсмической и подвижной нагрузок. Проведем преобразование компонент вектора  $\mathbf{R}$  в (2.23), (2.27) (аналогично и для перемещений  $\bar{\mathbf{q}}^o$ ), вводя матрицу  $\mathbf{\Gamma}^*$ , таким образом, чтобы было соответствие в расположении реакций в  $\mathbf{R}$  и  $\tilde{\mathbf{R}}^o$  в (3.17). В итоге, имеем условие равновесия и, соответственно, совместности в движущихся узлах системы  $\{e_h^*\}$  на шаге  $[t_{j+1}, t_j]$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{j+1/2}^o + \Gamma^* \mathbf{R}_{j+1/2} = \mathbf{0}$$

(4.5)

$$\mathbf{q}_1^o = \Gamma^* \bar{\mathbf{q}}^o = \Gamma^* [\mathbf{q}^{o1}, \mathbf{q}^{o2}, \dots, \mathbf{q}^{om^*}]'$$

(4.6)

Представим матричное уравнение (2.27) и в виде

$$\bar{\mathbf{f}}_{j+1/2} = -\mathbf{k}_{11}^* \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{j+1/2} - \mathbf{k}_{12}^* \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{j+1/2}^o + \tilde{\mathbf{k}}_1^*$$

(4.7)

$$\mathbf{R}_{j+1/2} = -\mathbf{k}_{21}^* \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{j+1/2} - \mathbf{k}_{22}^* \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{j+1/2}^o + \tilde{\mathbf{k}}_2^*$$

(4.8)

где  $\mathbf{k}_{ik}^*$ ,  $\mathbf{k}_i^*$  ( $i, k = 1, 2$ ) - блоки матриц  $\bar{\mathbf{K}}^*$  и  $\tilde{\mathbf{K}}^*$ . Заметим, что в (4.7)  $\mathbf{k}_{11}^*$  - ленточная подматрица, связанная с несущей конструкцией.

Подставим (4.7) и (4.8), с учетом соотношения  $\bar{\mathbf{q}} = \Gamma \mathbf{q}$ , соответственно, в (4.1) и (4.5), далее подставим (3.17), с учетом (4.6), в (4.5). Объединяя, после указанных подстановок, выражения (4.1) и (4.5) с учетом (4.3) на шаге  $[t_{j+1}, t_j]$  получим систему разрешающих уравнений

$$\mathbf{M}^* \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{j+1/2} = \tilde{\mathbf{M}}^* (\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{s_{j+1/2}}, t_{j+1/2}) \quad (j=0, 1, 2, \dots)$$

(4.9)

где  $\ddot{\bar{\mathbf{q}}} = [\ddot{\bar{\mathbf{q}}}, \ddot{\bar{\mathbf{q}}}^o]'$  - вектор ускорений в неподвижных и подвижных узлах системы  $\{e_h, e_h^*\}$  с размером  $\tilde{N}_0 \times 1$ ;  $\mathbf{M}^* = [\mathbf{M}_{ik}^*]$ , ( $i, k=1, 2$ ) - блочная матрица с размером  $\tilde{N}_0 \times \tilde{N}_0$ , учитывающая жесткостные, диссипативные и инерционные характеристики системы  $\{e_h, e_h^*, e_h^o\}$  на шаге  $[t_{j+1}, t_j]$  при  $\tilde{N}_0 = 6n + 2 \times N^*$ ,  $\tilde{\mathbf{M}}^* = [\tilde{\mathbf{M}}_i^*]$  - вектор, отражающий влияние на шаге  $[t_{j+1}, t_j]$  начальных условий задачи в момент  $t_j$  и внешних воздействий, включая сейсмические. Заметим,



что структуры матриц  $\mathbf{M}_{ik}^*, \tilde{\mathbf{M}}_i^*$  даны в [25];  $n$  - число узлов в граничноэлементной системе;  $N^*$  - число колес на мосту на шаге  $[t_{j+1}, t_j]$ .

Понизим порядок разрешающей системы уравнений. Для этого воспользуемся высказанными условиями по порядку дискретизации мостовой конструкции в систему  $\{e_h, e_h^*\}$  элементов. Проведем, после получения матрицы  $\mathbf{M}^*$ , иную редукцию системы уравнений (4.9), разделив ее на две подсистемы в соответствии с вектором  $\tilde{\mathbf{q}} = [\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3]^T$ . В итоге имеем

$$\mathbf{M}_{11} \ddot{\mathbf{q}}_{2,j+1/2} + \mathbf{M}_{12} \ddot{\mathbf{q}}_{3,j+1/2} = \mathbf{M}_1 \quad (4.10)$$

$$\mathbf{M}_{21} \ddot{\mathbf{q}}_{2,j+1/2} + \mathbf{M}_{22} \ddot{\mathbf{q}}_{3,j+1/2} = \mathbf{M}_2$$

(4.11)

где  $\mathbf{M}^* = [\mathbf{M}_{ik}]$ ,  $(i,k=1,2)$  - блочная матрица с размером  $\tilde{N}_0 \times \tilde{N}_0$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}_2 (\tilde{n}_2 \times 1)$  - вектор узловых ускорений мостовой фермы, исключая узлы продольных балок;  $\ddot{\mathbf{q}}_3 (\tilde{n}_3 \times 1)$  - вектор узловых ускорений узлов продольных балок и подвижных узлов. Заметим, что  $\tilde{n}_2 = \tilde{N}_0 - \tilde{n}_3$ ,  $\tilde{n}_3 = 6 \times n_s + 2 \times N^*$  где  $n_s$  - число узлов у продольных балок пролетного строения (фиг.1);  $\mathbf{M}_{11}$  - матрица (с размером  $\tilde{n}_2 \times \tilde{n}_2$ ), которая не меняется от шага к шагу  $[t_j, t_{j+1}]$  при  $(j=0,1,2,3,..)$ .

На завершающем этапе из (4.10) и (4.11) получим на шаге  $[t_{j+1}, t_j]$  разрешающую систему уравнений

$$\tilde{\mathbf{A}} \ddot{\mathbf{q}}_{3,j+1/2} = \tilde{\mathbf{B}}$$

(4.12)

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{M}_{22} - \mathbf{M}_{21} \mathbf{M}_{11}^{-1} \mathbf{M}_{12}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_{21} \mathbf{M}_{11}^{-1} \mathbf{M}_1$$

Отметим важный факт, который высвечивает преимущества суперэлементного подхода к решению задач динамики мостов. Так, система «мост-путь-состав»  $\{e_h, e_h^*, e_h^o\}$  при  $\tilde{m}=224$   $n=88$ ,  $N_s=22$ ,  $N^*=40$ ,  $n_v=5$ ,  $N=40$ ,

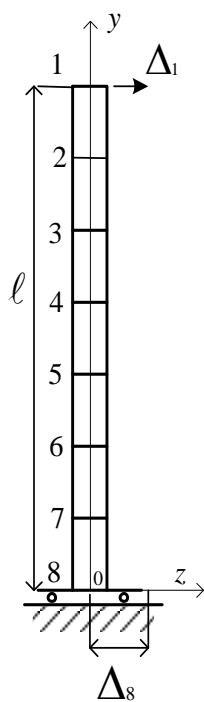
имеет более 35000 степеней свободы, в то время как максимальный порядок разрешающей системы (4.12) равен  $\tilde{n}_3=212$ , а для системы  $\{e_h, e_h^*\}$   $\tilde{n}_3=132$ .

Укажем общий путь решения задачи при  $j=0,1,2,..$ . В момент  $[t_j, t_{j+1}]$  определяется вектор ускорений  $\ddot{\mathbf{q}}_{3j+1/2}$ , решая систему (4.12), при использовании начальных условий задачи на момент  $t=t_j$ , и определяется, из подсистемы из (4.10) вектор  $\ddot{\mathbf{q}}_{2j+1/2}$ . Затем, используя (4.7), (4.8), (2.27), (2.21), и (2.13)–(2.15), определяются поля перемещений, скоростей, ускорений и динамических давлений для системы «состав-путь-мост» в момент  $t_{j+1}$ , что является исходным материалом (начальными условиями) для следующего шага. Далее процесс повторяется.

Следует отметить, что шаговая процедура, предложенная в [19] и используемая в данной статье, является – безусловно-устойчивой, в [19] в частности указано, что при выбранных параметрах эта шаговая процедура, совпадает с методом постоянных средних ускорений, характеристики точности и устойчивости которого приведены, например, в [31].

Тестирование стержневых граничных элементов при действии неустановившихся силовых воздействий, путем сравнения результатов с известными решениями, приведено в [19] и [26]. Тестирование метода учета действия подвижной инерционной нагрузки приведено в [23 и др.]. Тестирование решений нелинейных задач, при использовании модификации шаговой процедуры из [19], применяемой в настоящем исследовании, приведено выше, а так же в [24].

5. В качестве примера, демонстрирующего методику расчета сооружения только на сейсмическую нагрузку, первоначально рассмотрим решение задачи о колебаниях стойки при горизонтальном сейсмическом воздействии со

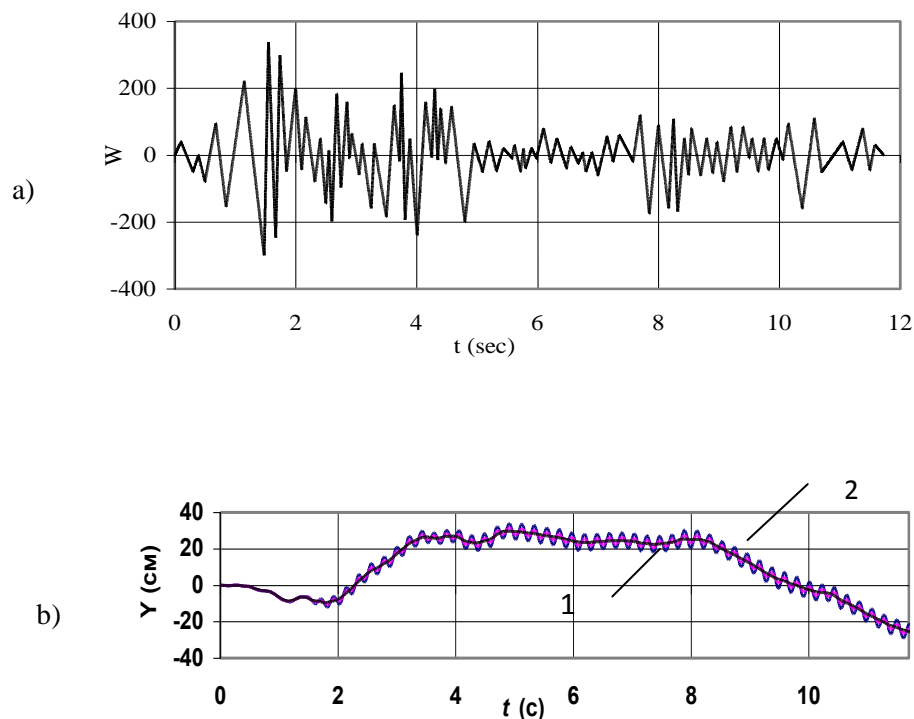


Фиг. 5



стороны основания.  $\Delta(t) = \theta(t) a \sin \omega t$  (Фиг.5). Рассмотрим стойку, как систему  $\{e_h\}$ , состоящую из семи равных граничных элементов при  $m=7$  и  $n = 8$ . Система (4.4) решалась при следующих входных данных:  $J_h = J = 0.4166 \times 10^{-4} \text{ м}^4$ ;  $E_h = E = 2.1 \times 9.8 \times 10^7 \text{ кН/м}^2$ ;  $\ell_h = 1.565 \text{ м}$ ;  $m_h = 8.513 \text{ кг/м}$ ;  $\ell = 10.955 \text{ м}$ ;  $\Delta t_j = 0.7 \times 10^{-2} \text{ с}$ ;  $a=0.01 \text{ м}$ ;  $N=45$ . На первом этапе задача тестировалась на примере кинематического возмущения основания по закону  $\Delta(t) = \theta(t) a \sin \omega t$ , заменяя при формировании (4.4) системы (4.3) на (4.2). Был выявлен резонансный режим в системе при  $\omega_1 = 29.95 \text{ с}^{-1}$ , где  $\omega_1$  – основная частота поперечных колебаний стержня, заделанного одним концом.

Рассмотрим случай, когда опора стойки имеет закон изменения горизонтального ускорения  $W$  [см/с<sup>2</sup>] близкий к форме известной акселерограммы (фиг. 6(a)) при землетрясении в Эль-Центро (Калифорния 1940 г) [1, 5]. Начальная скорость  $V_0$  на границе системы  $\{e_h\}$  определялась приближенно, используя акселерограмму. Первый пик ускорения  $W$  (фиг. 6a) рассматривался как функция  $w = -\omega^2 A \sin \omega t$ ,  $t \in [0, T/2]$ , где  $A = -W_{\max} / \omega^2 = V_0 / \omega$ ;  $T=0.4 \text{ с}$ ;  $W_{\max} = 40 \text{ см/с}^2$ . Используем шаговую процедуру (4.4), при включении в нее системы (4.3). На фиг.6(b) представлены изменения горизонтальных перемещений  $\Delta_1$  (линия 1) и  $\Delta_8$  (линия 2) стойки в зависимости от времени при действии на стойку (систему  $\{e_h\}$  при  $h=1, \dots, 8$ ) сейсмического воздействия, заданного акселерограммой. Следует отметить (фиг.6(b)), что горизонтальное смещение верха стойки (узла 1) совершает колебания с частотой  $\omega_1 = 29.95 \text{ с}^{-1}$ . Помимо этого результат, представленный на фиг.6(b), тестировался, показав хорошее совпадение, при использовании комплекса для расчета конструкций (программы MSC. Marc) при применении для решения задачи 16 и 32 традиционных стержневых конечных элементов (КЭ).

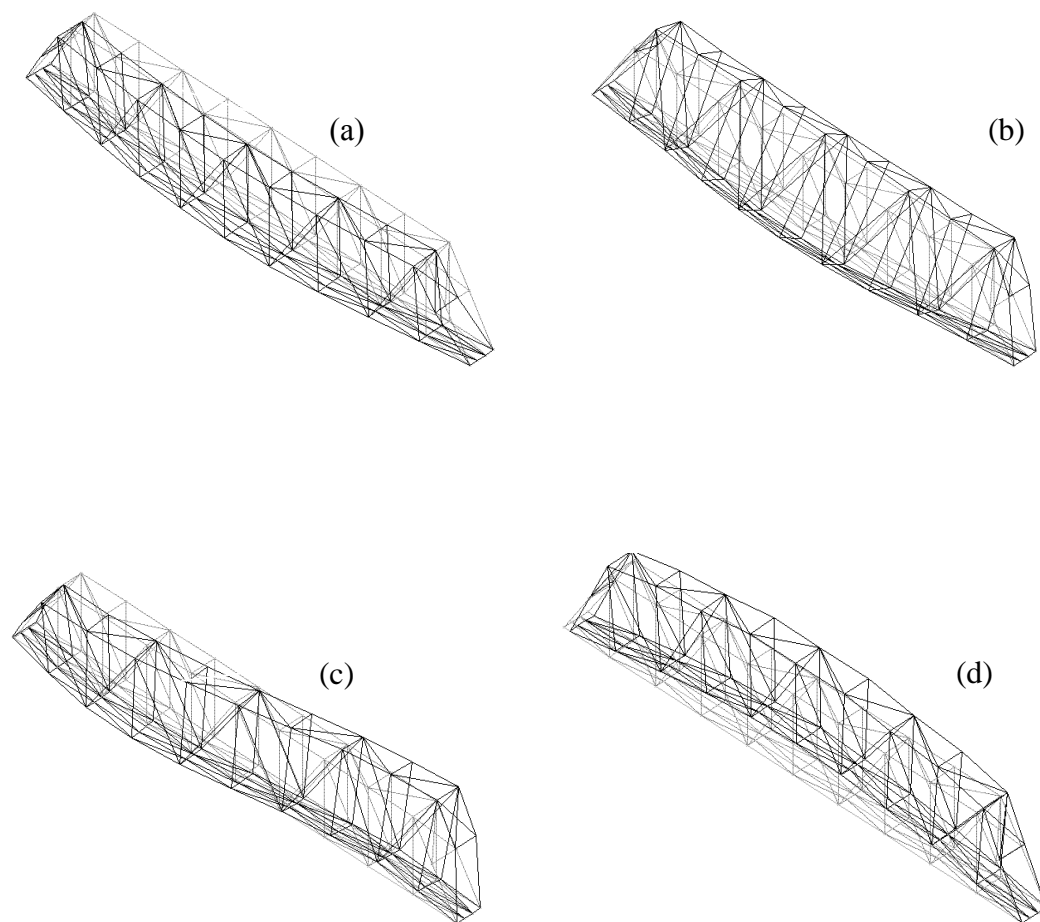


Фиг. 6(a,b)

Рассмотрим случай, когда при отсутствии подвижной нагрузки на пролетное строение (мостовую ферму пролетом 110м (фиг 1(a,b))) действуют сейсмические воздействия, задаваемое акселерограммой -  $W$  (фиг.6(a)), при различных сочетаниях в горизонтальном поперечном и вертикальном направлениях. Будем считать, что мостовое строение и ближайшая зона вне моста находятся на единой опорной платформе, а ферма имеет в продольном направлении шарнирно-подвижный комплект опор (противоположных опорным узлам 1 и 4 на фиг.1(b)). Заметим, что изучение колебаний моста, в случае, когда на опоры моста действует сейсмическое возбуждение, не вызывает затруднений при использовании рассматриваемой методики [10]. Для этого, в том числе и для контроля, первоначально определяем первые (из спектра) частоты колебаний фермы  $f_i (i=1, \dots, 4)$ , отвечающие, соответственно, колебаниям: боковым с частотой  $f_1 = 1.305$  Гц (Фиг.7a); крутильным (симметричным) с  $f_2 = 2.21$  Гц (Фиг.7b); крутильным (кососимметричным) с

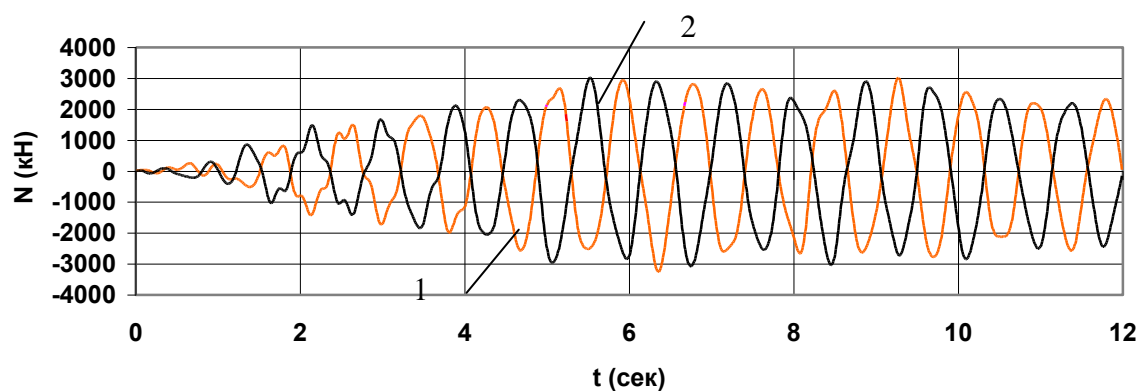


$f_3 = 2.71$  Гц (Фиг.7с); вертикальным с основной (балочной) частотой  $f_4 = 3.04$  Гц (Фиг.7d) [26].



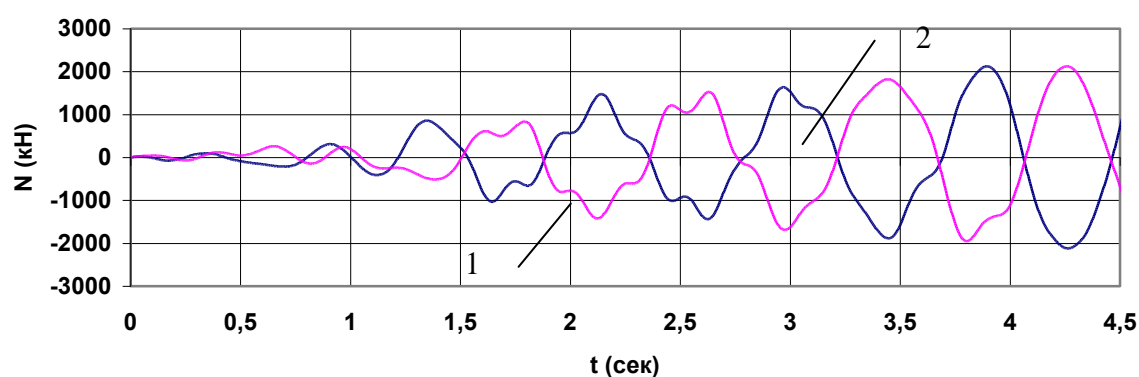
Фиг. 7 (a-d)

Применим шаговую процедуру (4.4), отвечающую только сейсмическому воздействию на ферму при  $\Delta t_j = 0.01$ с и числе шагов равном 1200. Будем исследовать усилия от сейсмических воздействий у элементов мостовой фермы. На фиг. 7, 8, 10 представлены результаты числовых экспериментов при использовании акселерограммы (фиг. 6(a)) в условиях, когда составляющие возмущения равны, соответственно,  $W_Z = 0.4W$ ,  $W_X = W$ ,  $W_Y = 0$ .



Фиг.8

На фиг. 8 и 9 представлены изменения продольных усилий  $N$  в верхних поясах фермы (фиг.1(b)), в элементах, соответственно, 29-35 (линия 1) и 30-36 (линия 2, растяжение), при этом в первом случае ферма моделировалась системой при  $\tilde{m}=224$  и  $\Delta t_j = 0.01$ с, а во втором при  $\tilde{m}=224$  и  $\Delta t_j = 0.003$ с. На фиг.10 представлены изменения тех же усилий только при вертикальных возмущениях  $W_Y = W_X = 0$  и  $W_Z = 0.4 \times W$ .

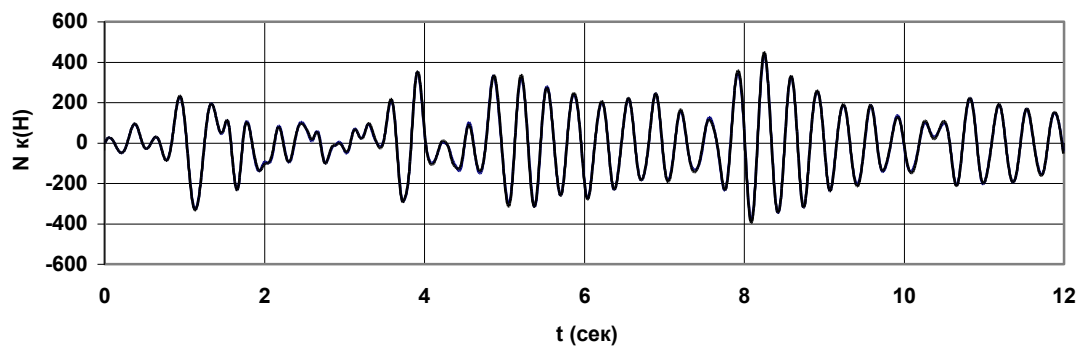


Фиг. 9

На фиг. 11 представлены результаты вычисления поперечных горизонтальных смещений  $Y$  опорного узла 4 (линия 2) и практически совпадающих перемещений узлов 34 и 35 (линия 2), что говорит о реализации при колебаниях первой формы колебаний фермы, это



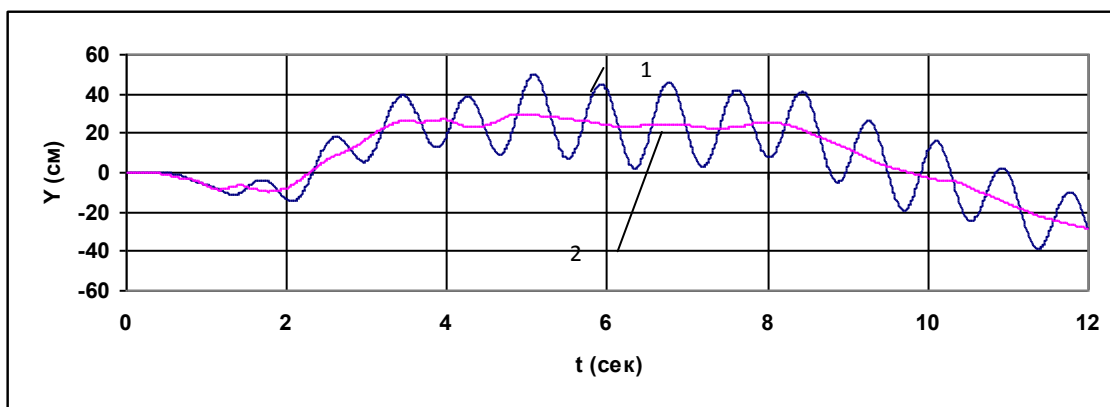
утверждение подтверждается и тем, что изменение усилий и перемещений на фиг. 8, 9, 11 происходит с частотой  $\nu \approx 1.3$ (Гц). На фиг. 10 изменения усилий происходит с частотой  $\nu \approx 3.03$ (Гц), что практически совпадает с частотами симметричных вертикальных колебаний указанной фермы.



Фиг.10

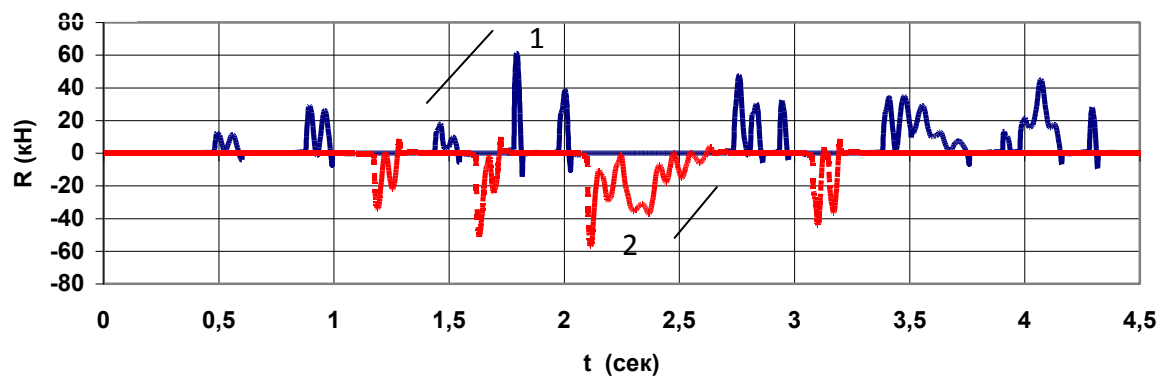
Рассмотрим случай, когда въезд железнодорожного состава на мост совпадает с началом сейсмического воздействия на систему «мост-путь-состав», т.е. систему  $\{e_h, e_h^*, e_h^o\}$ . Система уравнений (4.12), при включении в нее (4.3), решалась при  $P=82.5$  кН,  $V=144$  км/ч,  $\Delta t_j=0.003$ с, числе шагов равно 1500 и следующих входных данных для состава из пяти вагонов. Длина каждого вагона, как и в [25, 28], равна  $\ell_v = 26$ м. Расстояние между центрами тележек равно  $2a_2=18.8$ м. Расстояние между колесными парами равно  $2a_1=2.8$ м. Отрезок, определяющий положение состава на мосту, равен  $s = Vt$  (см. фиг1(a))

Инерционные, геометрические и упруго-вязкие характеристики вагона даны в [28]. Характеристики верхнего строения пути приведены в [17, 27, 29]. Заметим, что введение дополнительных стержневых элементов дает возможность успешно моделировать плиту проезжей части моста, заменяя этим мостовые продольные балки.

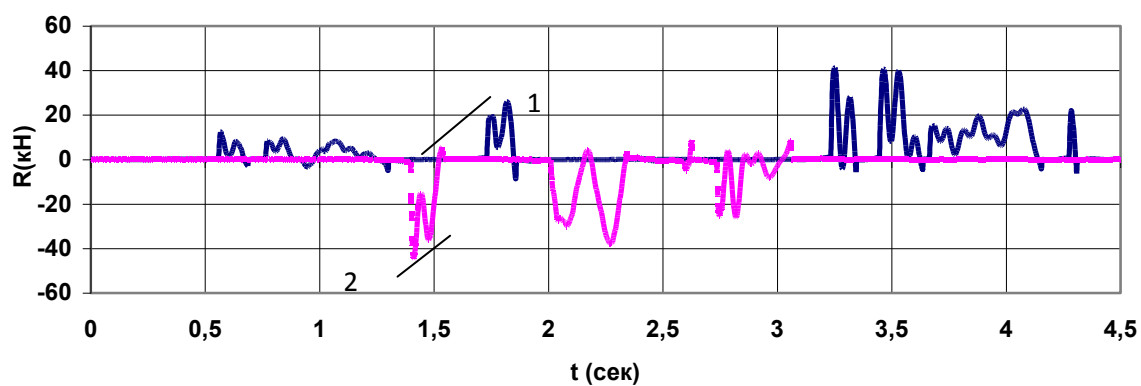


Фиг.11

(a)

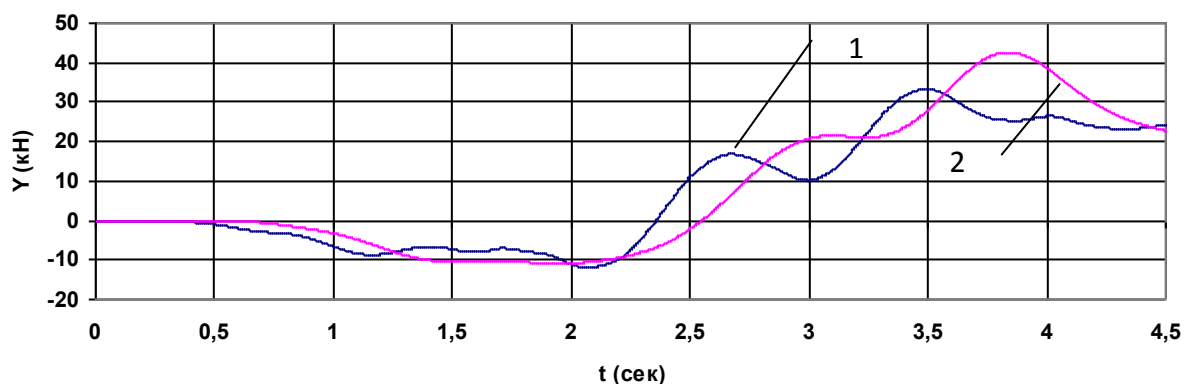


(b)



Фиг.12(a,b)





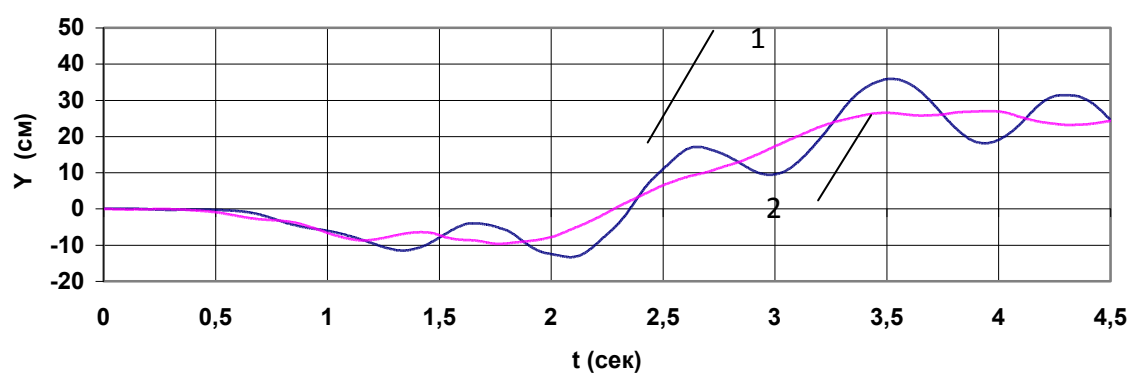
Фиг.13

Рассмотрим сейсмическое воздействие, используемое в предыдущих примерах (фиг. 8, 9, 11), с составляющими  $W_Z=0.4W$ ,  $W_X=W$ ,  $W_Y=0$ , при зазоре между базами колеи и колесной пары равно  $2 \times \tilde{\Delta}=0.014\text{м}$  в (3.10) и  $c_1=200\text{ Н/см}$ ,  $c_2=k_{x3}=200\text{ кН/см}$ ,  $k_{z3}=450\text{ кН/см}$ . На фиг. 12(a) представлены, изменения горизонтальных давлений  $R_{x1}$  (линия 1) на пролетное строение от левого колеса (по ходу движения состава, вдоль оси  $OY$ , на нас (фиг.2(a))) первой колесной пары третьего вагона и правого колеса той же колесной пары (линия 2). На фиг. 12(b) представлены, изменения горизонтальных давлений  $R_{x1}$  (линия 1) на пролетное строение от левого колеса (по ходу движения состава, вдоль оси  $OY$ , на нас (фиг.2(a))) первой колесной пары первого вагона и правого колеса той же колесной пары (линия 2).

На фиг. 13 представлены, изменения горизонтальных, поперечных смещений верхней угловой точки третьего вагона состава (линия 2) и точки контакта продольной балки (левой по ходу поезда) с левым элементом «колесо-путь» первой колесной этого вагона (линия 1) при движении состава по мосту и далее по предмостовой зоне. Заметим, что графики такого плана позволяют оценить смещение вагона относительно пролетного строения при сейсмическом воздействии на мост, с целью выяснения аварийных габаритов при движении состава.

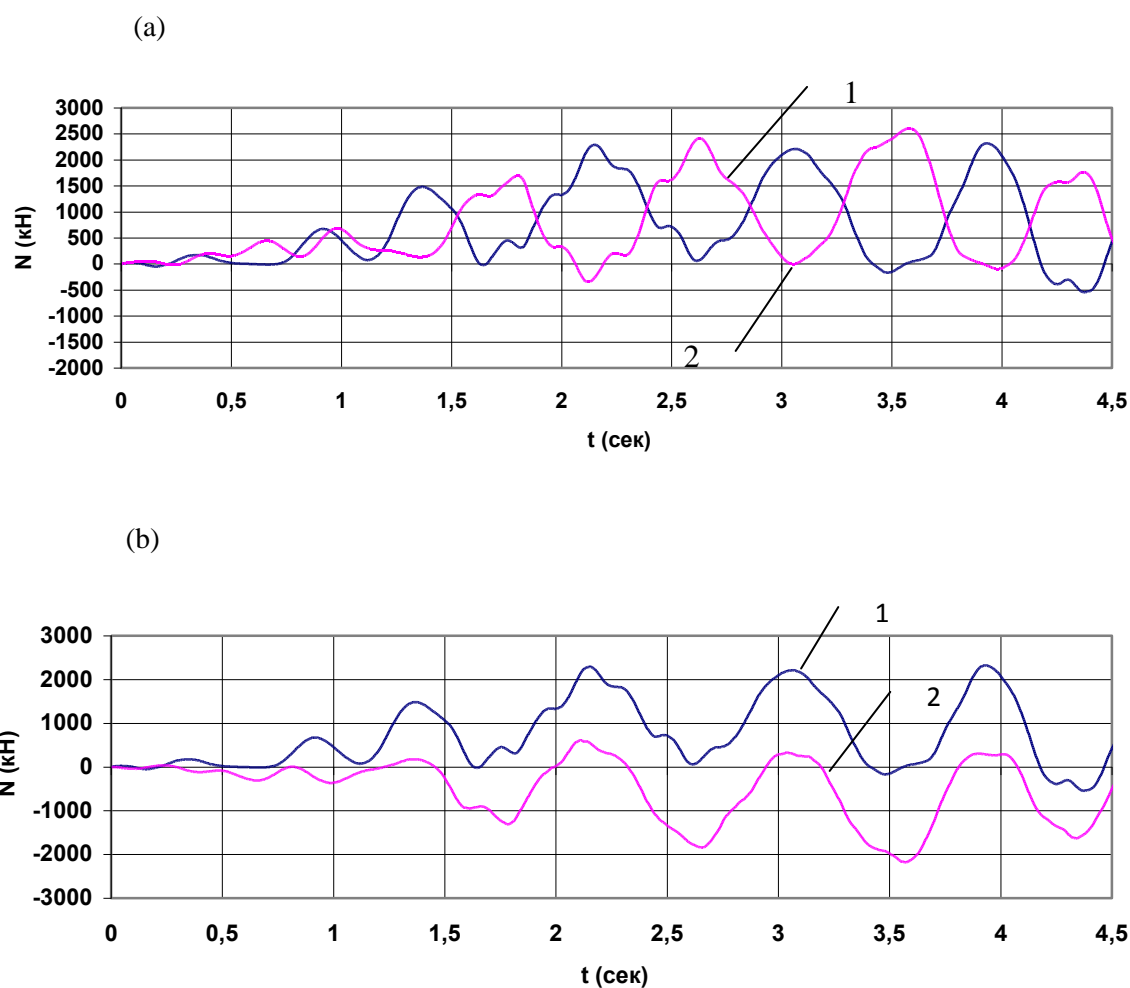
На фиг. 14 представлены, соответственно, изменения горизонтальных, поперечных смещений центрального узла 35 (фиг. 1) верхнего пояса фермы (линия 1) и опорного узла 4 (линия 2). При сравнении графиков на фиг. 11 и фиг. 14 можно отметить уменьшение поперечного горизонтального смещения узла 35 при некотором увеличении периода поперечных колебаний фермы с движущимся по ней составом, что отвечает увеличению приведенной массы фермы.

На фиг. 15(a) представлены изменения продольных усилий  $N$  в ферме в верхних поясах, соответственно в элементе 29-35 (линия 2) и в элементе 30-36 (линия 1) при движении состава из пяти вагонов. Следует отметить вертикальное смещение графиков на фиг. 14, по сравнению с результатами на фиг. 9, это, отвечает усилиям от поездной нагрузки на ферме. На фиг. 15(b) представлены изменения продольных усилий  $N$  в ферме в верхних поясах, соответственно в элементе 30-36 (линия 1) и в элементе 25-31 (линия 2) при движении состава из пяти вагонов. ( $V=144$  км/ч,  $W_Z=0.4 \times W$ ,  $W_X=W$ ,  $W_Y=0$  (Фиг. 6а),  $\Delta t=0.003$ с).



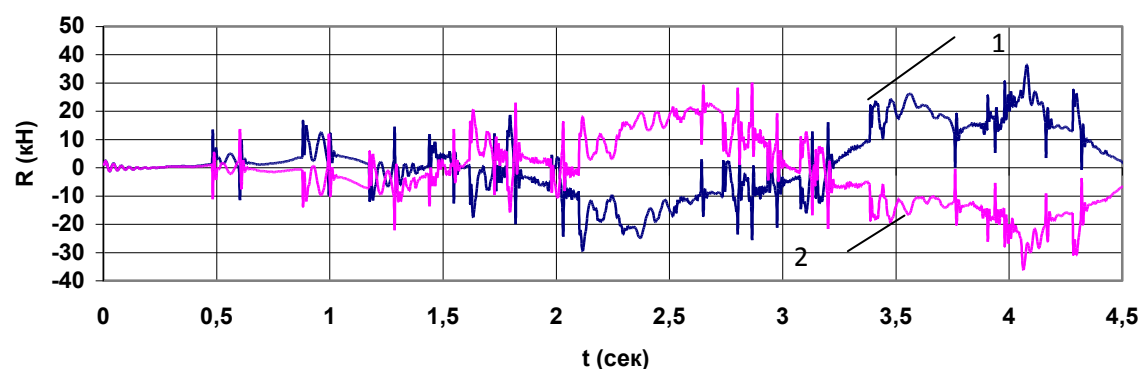
Фиг.14





Фиг.15(a,b)

Возвращаясь к вопросам безопасности при сейсмических воздействиях, отметим, что аварийная ситуация, соответствующая сходу колесных пар с рельсового пути, возникает в том числе, если происходит въезд реборды колеса на рельс. Это явление возникает при определенном соотношении между вертикальной и горизонтальной составляющими динамической реакции колеса [30]. При сейсмическом воздействии, кроме рядовой ситуации, возникает интенсивное поперечное раскачивание кузова вагона и, как следствие, обезгруживание вертикальных давлений колес на рельс, при этом, если в этот момент возникает критическое, боковое горизонтальное давление рельса на реборду колеса, то может произойти аварийная ситуация.



Фиг.16

На фиг 16. представлено изменение динамических добавок  $R_{z1}$  (кривая 1) and  $R_{z2}$  (кривая 2) к вертикальным статическим давлениям, соответственно, левого и правого колес первой колесной пары третьего вагона при сейсмическом воздействии на пролетное строение при  $V=144$  км/х;  $2 \times \tilde{\Delta}=0.014$ м (Фиг. 3b);  $W_z=0.4 \times W$ ,  $W_x= W$ ,  $W_y=0$  (Фиг.5);  $\Delta t=0.003$ с. Отметим изменение полных динамических реакций  $P + R_{zi}$ , вызванных раскачиванием вагонов на мосту при сейсмическом воздействии.

Предлагаемый метод позволяет оценить опасность для состава при сейсмическом воздействии на мост. Известно, как отмечалось, что сход возникает в момент, когда имеется критическое соотношение между вертикальным давлением колеса на рельс ( для локомотива) и максимальной величиной поперечной силы (фиг. 12(a,b), 18) в форме [30] (формулы даны в [30] для штатного режима)

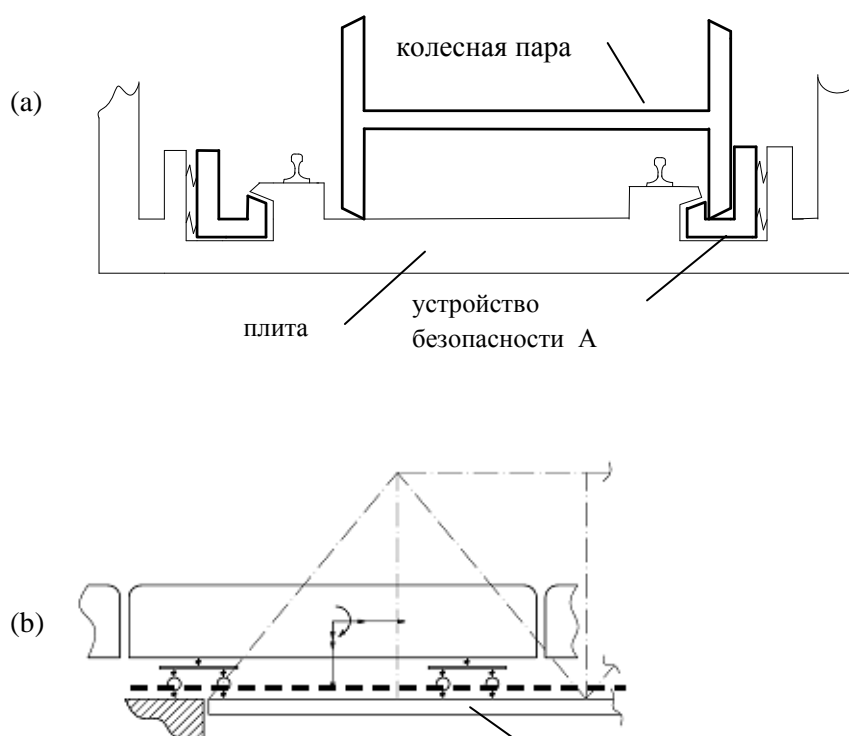
$$\frac{\operatorname{tg} \beta - \mu}{\mu \operatorname{tg} \beta + 1} \times \frac{P}{R_{xi}} \geq [k_d], \quad k_d = 1.4 - 1.5, \quad \mu = 0.2 \quad \frac{R^*}{R_{xi}} \geq 0.813, \quad \beta = 70^\circ$$

где  $R^* = P - R_{zi}$  -вертикальная давление колеса,  $\mu$  - коэффициент трения скольжения (приведенные формулы даны в [30] для штатного режима движения подвижного состава)



Рассмотрим случай, моделирующий сход состава в системе «состав мост», будем использовать устройство безопасности типа «ловушка» (см. фиг.17(a,b)), которое позволяет удерживать состав от поперечного смещения вагонов после схода с рельсового пути, оценим горизонтальные усилия, появляющиеся в в этом случае, при этом тестируем продолженную методику для случая односторонних связей, при движении состава с зазором между колесной парой и базой рельсового пути на мосту.

Заметим, что применяя предложенный метод можно решить указанную задачу, используя систему (21)  $\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}}_{2,j+1/2} = \mathbf{B}$  в линейной постановке. В этом случае наложим двухсторонние упругие связи на правые колеса (Фиг. 2(a)) установим «ловушку» (фиг. 17(a,b)), работающую при сходе движущегося состава по мосту при действии на него сейсмического воздействия. Этот случай с одной стороны позволяет оценить и точность предложенной методики, сравнивая указанное решение с решением системы  $\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}}_{2,j+1/2} = \mathbf{B}$  в нелинейной постановке, когда при односторонних для каждого колеса связях реализуем решению той же задачи при минимальном зазоре.

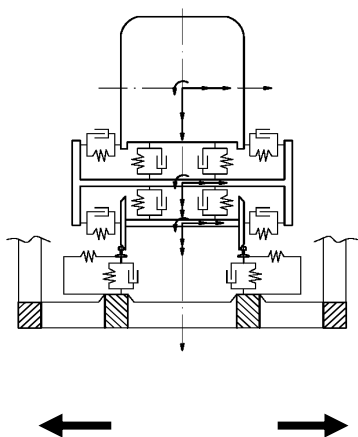


Фиг. 17 (a,b).

А

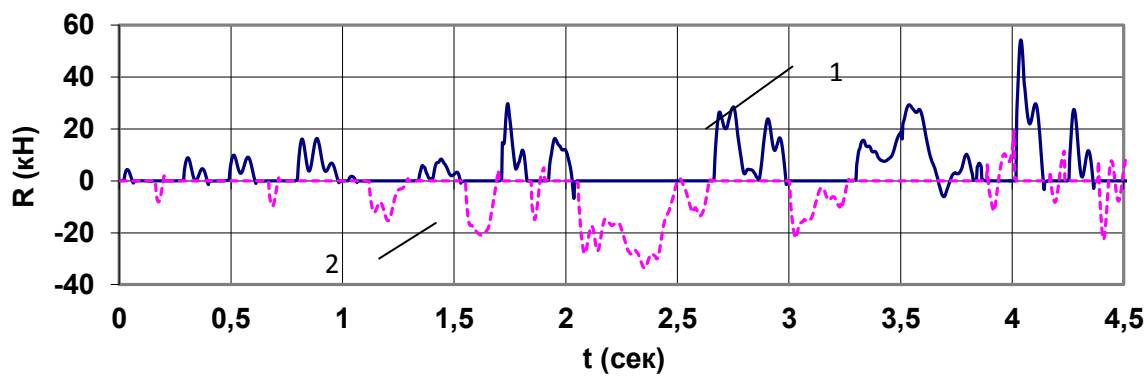
На фиг.18 представлены, изменения горизонтальных давлений  $R_{x1}$  (линия 1) на пролетное строение от левого колеса (по ходу движения состава, вдоль оси  $OY$ , на нас (фиг.2(a))) первой колесной пары третьего вагона и правого колеса той же колесной пары (линия 2) при  $V=144$  км/ч;  $2 \times \tilde{\Delta}=0.001$  м (Фиг. 3b);  $W_Z=0.4 \times W$ ,  $W_X=W$ ,  $W_Y=0$  (Фиг.6(a));  $\Delta t=0.003$  с.

На фиг. 19 представлены, изменения горизонтальных давлений  $R_{x1}$  на пролетное строение от левого колеса (по ходу движения состава, вдоль оси  $OY$ , на нас (фиг.2(a))) первой колесной пары третьего вагона при двухсторонней связи, моделирующей устройство безопасности типа «ловушка» при  $V=144$  км/ч;  $2 \times \tilde{\Delta}=0.0$  м (Фиг. 3b);  $W_Z=0.4 \times W$ ,  $W_X=W$ ,  $W_Y=0$  (Фиг.6(a));  $\Delta t=0.003$  с. Следует отметить близкие результаты, представленные на фиг. 18 и 19, соответственно при  $2 \times \tilde{\Delta}=0.001$  м (при односторонних связях, нелинейная задача) и  $2 \times \tilde{\Delta}=0.0$  м (при двухсторонних связях, при работе устройства «ловушка» ( $D_i^R = 1$  and  $D_i^L = 0$ ), линейная задача).

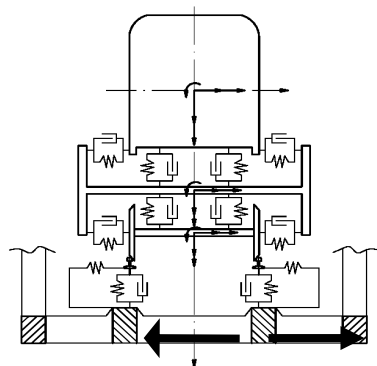


$$2 \times \Delta = 0.001 \text{ м}$$

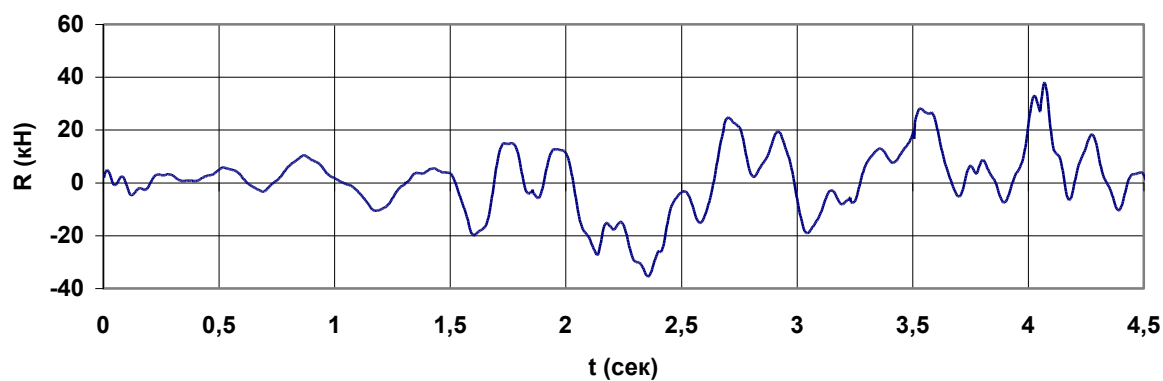




Фиг. 18.



$$2 \times \Delta = 0.0 \text{ м}$$



Фиг. 19.

Этот факт тестирует задачу и говорит о возможности в упрощенной форме оценивать поперечные горизонтальные  $R_{xi}$  усилия возникающие в предлагаемом устройстве безопасности.

Как итог проведенных исследований можно отметить, что величина горизонтального давления на рельс (линия 1, фиг. 12(a)) в момент  $t=1.75\text{с}$  (при учете сил трения при скольжении реборды по головке рельса [30]), и

вертикальная реакция, уменьшенная за счет обезгруживания рельса, до 60 кН (при статическом давлении  $P=82.5$  кН) уже создают критическую ситуацию для безопасности [30] при отсутствии сейсмических воздействий. Серии числовых экспериментов (при различных акселерограммах) и компьютерное отслеживание как габаритов движущихся вагонов, так и реакций колес вагонов может выявить горизонтальную максимальную относительную скорость колесной пары в моменте схода, а далее и динамическое давление при ударе колесной пары об удерживающие направляющие [13]. Однако, как отмечалось, уже рассмотренная методика позволяет оценить поведение системы «состав-мост» при использовании, например, специальных устройств, обеспечивающих, после схода колесной пары, продолжение её движения, как и вагона, но уже в двухсторонних удерживающих направляющих. Решение такой задачи можно получить, используя (3.1), (3.5) и (4.12) (при неизменных значениях  $D_i^R=1$  и  $D_i^L=0$ ) или используя (3.7) и (4.12) при малой величине зазора  $2 \times \tilde{\Delta}$ . Указанный подход позволяет конструировать инженерам своеобразные ловушки безопасности типа удерживающих барьеров [13]. Результаты, представленные в числовых экспериментах на фиг. 7-19, демонстрируют возможности рассмотренного метода в задачах, связанных с изучением действия сейсмических воздействий на сооружения.

Предложенная методика и шаговая процедура может быть использована:

- для исследования напряженно-деформируемого состояния элементов стержневых систем при сейсмических воздействиях, задаваемых акселерограммами
- для оценки поведения системы ”состав – мост” при сейсмических воздействиях и скоростном движении составов
- при конструировании защитных систем для подвижного состава, обеспечивающих безопасность его при сейсмических воздействиях.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chopra Anil K. Dynamics of Structures (Theory and Applications to Earthquake Engineering). Upper Saddle River, New Jersey: Pearson Prentice Hall. -2007. 876р.
2. Сейсмостойкое строительство зданий. Под. ред. И. Л. Корчинского.. М., «Высш. школа», 1971. 320 с.
3. Гольденблат И.И., Николаенко Н.А., Поляков С.В., Ульянов С.В. Модели сейсмостойкости сооружений. М.: Наука.-1980.-252с
4. Болотин В.В., Радин В.П., Чирков В.П. Динамика конструкций при многокомпонентных сейсмических воздействиях // Изв. РАН. Механика твердого тела.-2000.- № 3.- С. 149-157.
5. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Е.Н. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. - М.: Стройиздат, 1984. - 415 с.
6. Сильницкий Ю, М. Уздин А.М. Расчет мостов на сейсмические воздействия/ Ю. М. Сильницкий, А. М. Уздин.—Л.: ЛИИЖТ,1977.-41с.
7. Назаров Ю.П. Аналитические основы расчета сооружений на сейсмические воздействия. - М.: Наука.-2010.-467с.
8. J.-M. Rameau, C. de Larminat, N. Blay, J.-C. Queval. Behaviour of a metal framework subjected to seismic loads.// EURODYN 2005 - Proceedings of the 6 international conference on structural dynamics/Paris/France/4-7 September, 2005; pp.1835 -1839.
9. Tecchio G., Grendene M., Modena C. Spatial variability of earthquake ground motion: e the seismic response of long multi-span girder bridges.// *Structural Dynamics EURODYN 2011 -/Leuven, Belgium /2-6 July r, 2011; book of abstracts (pp 50-51) and the CD-ROM .(pp 1333-1350.)*
10. Ivanchenco I.I. A boundary element scheme for problems of framed structures subjected to seismic load.// *Structural Dynamics EURODYN 2011 - Leuven, Belgium /2-6 July r, 2011; book of abstracts (pp 52) and the CD-ROM .(pp 1406-1411.)*
11. Yau J. D., Fryba. L. Vibration of suspended beams to moving loads and support motions.// EURODYN 2005 - Proceedings of the 6 international conference on structural dynamics/Paris/France/4-7 September, 2005; pp.1009 - 1014.

12. Tanabe M., Matsumoto N., Wakui H., Okuda H., Sogabe M., Tanabe Y., Dynamic interaction analysis of a Shinkansen train and the railway structure under seismic loads.// EUROODYN 2005 - Proceedings of the 6 international conference on structural dynamics/Paris/France/4-7 September, 2005; pp.1001 -1007.
13. Tanabe M., Wakui H., Sogabe M., Matsumoto N., Tanabe Y. An efficient numerical model for dynamic interaction of high speed train and railway structure including post- derailment during an earthquake.// *Structural Dynamics EUROODYN 2011 -/Leuven, Belgium /2-6 July r, 2011; book of abstracts (pp 47) and the CD-ROM .(pp 1217-1223.)*
14. СНиП\* 11-7-81 «Строительство в сейсмических районах» Минстрой – М., 2002
15. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука,1967.444с.
16. Болотин В.В. Задача о колебаниях мостов под действием подвижной нагрузки // Изв. АН СССР ОТН. Механика и машиностроение. 1961.№4. С.109-115.
17. Бондарь Н.Г., Козьмин Ю.Г., Тарасенко В.П. и др. Взаимодействие железнодорожных мостов с подвижным составом. М.: Транспорт, 1984.272с.
18. Филиппов А.П., Кохманюк С.С. Динамическое воздействие подвижных нагрузок на стержни. Киев: Наук. думка,1967.132с.
19. Иванченко И.И. Расчеты на подвижные и импульсивные нагрузки стержневых систем с распределенными параметрами// Прикл. механика. 1988.Т.24. №9. С. 109-118.
20. Fryba L. Vibration of Solids and structures under Moving Loads. Prague: Academia, 1972. 484с
21. Bruni S., Collina A., Corradi R. Numerical modelling of railway runnability and ballast settlement in railroad bridges // EUROODYN 2002. –Munich. –Germany. -2-5 September. – 2002. – P.1143-1148.
22. Весницкий А.И., Метрикин А.В. Неустойчивость колебаний объекта, равномерно движущегося по случайно-неоднородной упругой системе// Изв. АН. Мех. тверд. тела.- 1996.№5.С.162-169.
23. Иванченко И.И. Метод расчета на подвижную нагрузку стержневых систем, моделирующих мосты// Изв. РАН. МТТ.2001. №4. С.151-165.
24. Иванченко И.И. Динамика мостовых и путевых конструкций при действии железнодорожной подвижной нагрузки// Изв. РАН, Механика твердого тела. - 2005.- № 4. - С. 158-177.



25. Иванченко И.И. Динамическое взаимодействие мостов и высокоскоростных железнодорожных составов // Изв. РАН. Механика твердого тела.-2011.- № 3. – С.146-160.
26. Иванченко И.И. Динамика транспортных сооружений (высокоскоростные подвижные, сейсмические и ударные нагрузки) - М.: Наука.-2011.-574с
27. Вериго М. Ф., Коган А. Я. Взаимодействие пути и подвижного состава. М.: Транспорт, 1986. 559 с.
28. Коган А.Я., Львов А.А., Левинзон М.А. Характеристики подвижного состава и спектральных неровностей пути для скоростей до 350 км/ч // Вестн. ВНИИЖТ. 1991. N3.С.10-14.
29. Кудрявцев Н.Н. Исследование динамики необрессоренных масс вагонов// Тр. ВНИИЖТ. 1965. Вып.287. 168с.
30. Бирюков И.В., Савоськин А. Н., Бурчак Г. П. Механическая часть тягового подвижного состава.- М: Транспорт.-1992.-439с.
31. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. -М., 1982. - 447 с.
32. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. – М: Мир, 1984 - 426 с.
33. Прочность, устойчивость и колебания. Справочник под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. – М: Машиностроение, -, 1968. 3 т.- 567с.
34. Розин Л.А. Вариационные постановки задач для упругих систем. -Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. - 224 с.
35. Ivanchenko I.I. A boundary element scheme for problems of framed structures subjected to seismic and moving loads // *International Symposium on Speed-up and Service Technology for Railway and Maglev Systems -STECH'12,- Seoul, Korea, September 17-19, 2012, program book (35p) and Proceedings, CD-ROM, 18p.*

*Доклады и публикации за отчетный период (май-февраль 2012-2013 годы) по результатам исследований по проекту Иванченко И.И. «Развитие методов расчета железнодорожных мостов на сейсмические нагрузки» :*

1. Доклад и публикация в трудах конференции: «Граничноэлементный метод для расчета рамных конструкций на сейсмические и подвижные воздействия» ("A boundary element scheme for problems of framed structures subjected to seismic and moving loads"), международная конференция в республике Корея: **STECH'12 - International Symposium on Speed-up and Service Technology for Railway and Maglev Systems, September 17 - 19, 2012, COEX, Seoul, Korea** (“Международный симпозиум по высокоскоростному движению и сервисным технологиям для железных дорог и для поездов на магнитном подвесе”, сентябрь 17 по 19 2012, Сеул, Корея)
2. Доклад и публикация в трудах конференции: «К расчету железнодорожных мостов на сейсмические воздействия»// X111 научно-практической конференции «Безопасность движения поездов»-М: МИИТ.- 2012.- 1V-7с