



ОТЧЕТ

АНАЛИЗ И ОСОБЕННОСТИ МЕТОДОВ ПРИ РАСЧЕТЕ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК НА ИЗГИБ

Авторы : Косауров А.П., Тимофеев П.В

Научный руководитель: доцент Скворцов В.И.

г. Москва
2013

Задачи об изгибе пластин и оболочек играют важную роль в строительстве и в технике, поэтому исследование данных задач имеет важное практическое значение.

При рассмотрении задачи об изгибе пластин наиболее распространенными и интересными является численная реализация методов двойных и одинарных тригонометрических рядов.

Рассматриваются два вопроса:

- 1) Сопоставление решения в двойных тригонометрических рядах от действия равномерно распределенной нагрузки с решением от действия сосредоточенной силы, являющейся равнодействующей распределенной нагрузки.

Данный вопрос наиболее актуален при выполнении ручных расчетов во время проектирования мостов и тоннелей, так как нагрузка, сведенная к равнодействующей, существенно упрощает расчетную схему сооружения.

- 2) Сравнение решения, полученного в одинарных тригонометрических рядах, с решением в двойных тригонометрических рядах. Анализ данного вопроса позволяет выявить целесообразность использования того или иного метода при меньшем удержании числа членов ряда разложения без существенной потери точности полученных результатов.

При анализе первого вопроса было принято, что все стороны прямоугольной пластины являются шарнирно опертыми, а нагрузка и прогибы изменяются по синусоидальному закону как вдоль оси x , так и вдоль оси y . Коэффициент Пуассона жесткой тонкой прямоугольной пластины принят равным 0,3, а цилиндрическую жесткость D (рисунок 1).

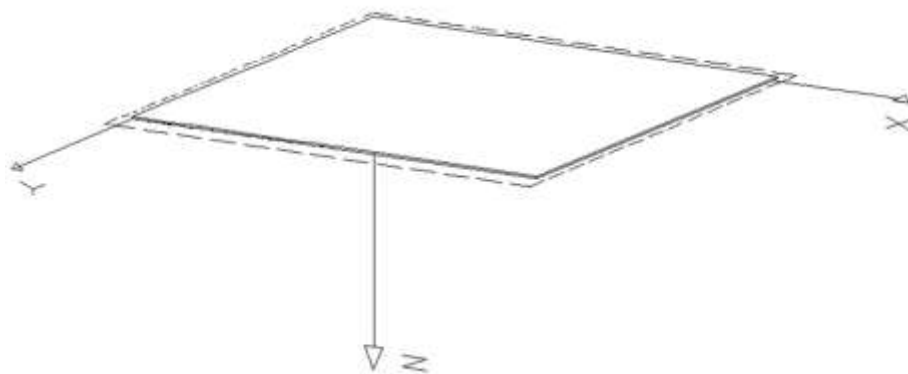


рисунок 1

Рассматривалось два способа загрузки квадратной пластины ($b=a$) равномерно распределенной нагрузкой q (по половине площади, по всей площади), в каждом из которых нагрузка q сводилась к равнодействующей силе F (рисунок 2).

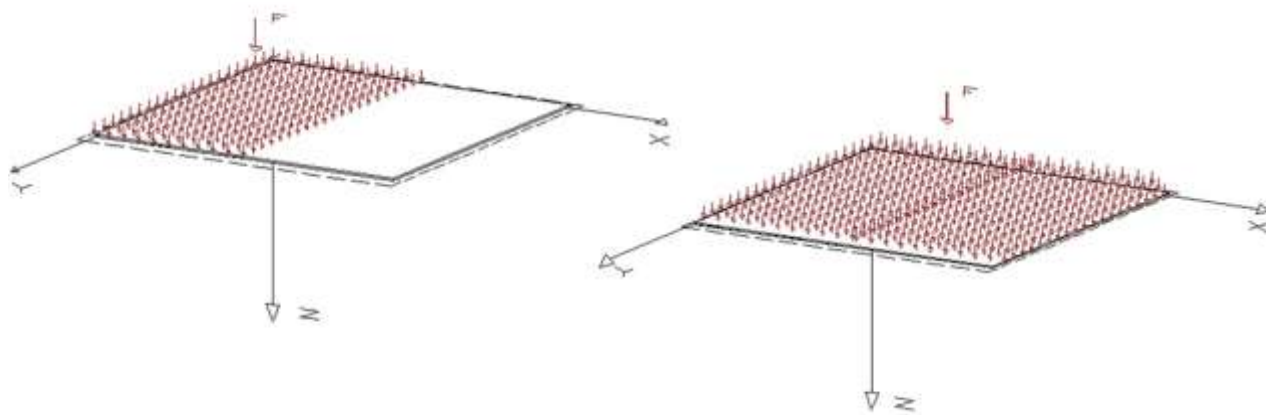


рисунок 2

Для сравнения решений велся анализ сходимости изгибающих моментов M_x в сечении $y=a/2$ и крутящих моментов H в сечении $y=a$. Удержание 3,5,10 членов m и n разложения функции прогибов в ряд по синусу (m полуволн по оси x и n - по оси y) позволило выполнить количественную и качественную оценку сходимости (рисунок 3).

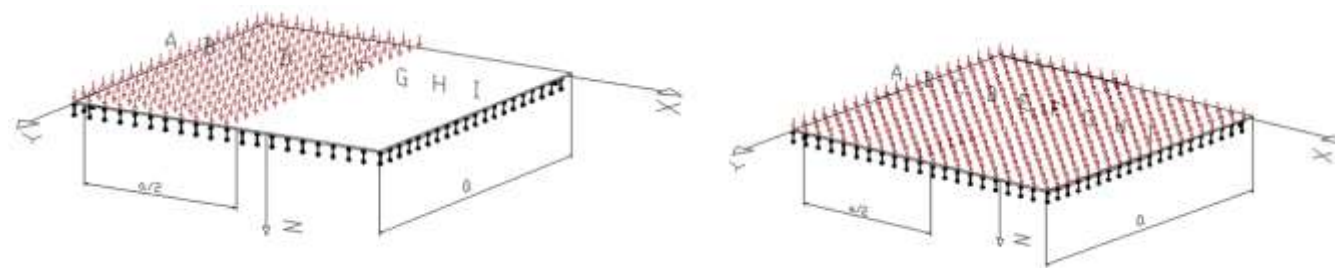


рисунок 3

Все вычисления выполнялись в программном комплексе Maple.

Значения M_x ($y=a/2$) при первом варианте загрузки.

Точки	От действия сосредоточенной силы F (равнодействующая) при n			От распределенной нагрузки q при n		
	3	5	10	3	5	10
A	0	0	0	0	0	0
B	$0,06726875214 qa^2$	$0,06195949007 qa^2$	$0,04391125270 qa^2$	$0,02109566153 qa^2$	$0,02189191587 qa^2$	$0,02219522693 qa^2$
C	$0,09264819693 qa^2$	$0,1056764485 qa^2$	$0,1417923757 qa^2$	$0,03276547427 qa^2$	$0,03281926469 qa^2$	$0,03220418208 qa^2$
D	$0,07116927110 qa^2$	$0,07808957969 qa^2$	$0,05343831082 qa^2$	$0,03209692718 qa^2$	$0,03221526575 qa^2$	$0,03258285256 qa^2$
E	$0,03337060045 qa^2$	$0,02246805771 qa^2$	$0,03444723090 qa^2$	$0,02346220535 qa^2$	$0,02411684490 qa^2$	$0,02398349779 qa^2$
F	$0,01051614347 qa^2$	$0,01351770625 qa^2$	$0,01537000326 qa^2$	$0,01365463091 qa^2$	$0,01345532790 qa^2$	$0,01321830923 qa^2$
G	$0,00687172125 qa^2$	$0,01435802937 qa^2$	$0,00442118863 qa^2$	$0,00668412879 qa^2$	$0,00628870619 qa^2$	$0,00669811354 qa^2$
H	$0,00661562453 qa^2$	$-0,00261238331 qa^2$	$0,00584294517 qa^2$	$0,002653365275 qa^2$	$0,003131978040 qa^2$	$0,002830683607 qa^2$
I	$-8,85855525 \cdot 10^{-12} qa^2$	$1,202085812 \cdot 10^{-11} qa^2$	$5,989399173 \cdot 10^{-11} qa^2$	$-2,56240282 \cdot 10^{-12} qa^2$	$-3,63839209 \cdot 10^{-12} qa^2$	$-5,62339658 \cdot 10^{-12} qa^2$

Значения N ($y=a$) при первом варианте загрузки.

Точки	От действия сосредоточенной силы F (равнодействующая) при n			От распределенной нагрузки q при n		
	3	5	10	3	5	10
A	$0,02860141328 qa^2$	$0,0318880784 qa^2$	$0,03125262668 qa^2$	$0,02097911107 qa^2$	$0,02140837395 qa^2$	$0,02185587295 qa^2$
B	$0,02493538452 qa^2$	$0,0274812081 qa^2$	$0,02695554447 qa^2$	$0,01783055859 qa^2$	$0,01796445728 qa^2$	$0,01779258247 qa^2$
C	$0,01544585155 qa^2$	$0,0153636739 qa^2$	$0,01528247935 qa^2$	$0,01003733722 qa^2$	$0,009950745905 qa^2$	$0,01000595076 qa^2$
D	$0,00377542432 qa^2$	$0,0012545797 qa^2$	$0,001903176960 qa^2$	$0,001291832026 qa^2$	$0,001327518724 qa^2$	$0,001423178024 qa^2$
E	$-0,0063118900 qa^2$	$-0,007998568 qa^2$	$-0,007582798344 qa^2$	$-0,005279509171 qa^2$	$-0,005416226175 qa^2$	$-0,005706049555 qa^2$
F	$-0,0127017848 qa^2$	$-0,0125662638 qa^2$	$-0,01280277699 qa^2$	$-0,008758185493 qa^2$	$-0,008987219234 qa^2$	$-0,008833792306 qa^2$
G	$-0,01544585155 qa^2$	$-0,015363673 qa^2$	$-0,01528247935 qa^2$	$-0,01003733722 qa^2$	$-0,009950745908 qa^2$	$-0,01000595076 qa^2$
H	$-0,0160090239 qa^2$	$-0,016169524 qa^2$	$-0,01605594444 qa^2$	$-0,01036420512 qa^2$	$-0,01030475677 qa^2$	$-0,01038196817 qa^2$
I	$-0,0159776331 qa^2$	$-0,015890941 qa^2$	$-0,01608703000 qa^2$	$-0,01042009273 qa^2$	$-0,01057592161 qa^2$	$-0,01044377385 qa^2$

Значения M_x ($y=a/2$) при втором варианте загрузки.

Точки	От действия сосредоточенной силы F (равнодействующая) при n			От распределенной нагрузки q при n		
	3	5	10	3	5	10
A	0	0	0	0	0	0
B	0,007801037915 qa ²	0,03226017917 qa ²	0,01905411520 qa ²	0,02374902680 qa ²	0,02502389390 qa ²	0,02502591053 qa ²
C	0,06674120093 qa ²	0,04493611544 qa ²	0,06889446189 qa ²	0,03944960308 qa ²	0,03910797090 qa ²	0,03890229565 qa ²
D	0,1555697911 qa ²	0,1509543926 qa ²	0,1185625119 qa ²	0,04575155810 qa ²	0,04567059365 qa ²	0,04580116178 qa ²
E	0,1990398363 qa ²	0,2400689556 qa ²	0,2924271285 qa ²	0,04692441072 qa ²	0,04823368982 qa ²	0,04796699559 qa ²
F	0,1555697911 qa ²	0,1509543925 qa ²	0,1185625117 qa ²	0,04575155811 qa ²	0,04567059366 qa ²	0,04580116179 qa ²
G	0,06674120104 qa ²	0,04493611555 qa ²	0,06889446200 qa ²	0,03944960308 qa ²	0,03910797090 qa ²	0,03890229565 qa ²
H	0,007801037935 qa ²	0,03226017916 qa ²	0,01905411626 qa ²	0,02374902679 qa ²	0,02502389389 qa ²	0,02502591052 qa ²
I	4,211680251 · 10 ⁻¹¹ qa ²	-5,259509138 · 10 ⁻¹¹ qa ²	-7,168972 · 10 ⁻¹¹ qa ²	-2,65229418 · 10 ⁻¹¹ qa ²	-2,904281315 · 10 ⁻¹¹ qa ²	-3,217178 · 10 ⁻¹¹ qa ²

Значения H ($y=a$) при втором варианте загрузки.

Точки	От действия сосредоточенной силы F (равнодействующая) при n			От распределенной нагрузки q при n		
	3	5	10	3	5	10
A	0,06178340619 qa ²	0,06145469581 qa ²	0,06112991738 qa ²	0,03139920379 qa ²	0,03198429556 qa ²	0,03229964682 qa ²
B	0,05742161769 qa ²	0,05747157584 qa ²	0,05771744283 qa ²	0,02819476372 qa ²	0,02826921497 qa ²	0,02817455064 qa ²
C	0,04457904641 qa ²	0,04777901983 qa ²	0,04733965667 qa ²	0,02007467444 qa ²	0,01990149181 qa ²	0,02001190152 qa ²
D	0,02446719933 qa ²	0,02982988876 qa ²	0,02830553496 qa ²	0,01005001752 qa ²	0,01031473796 qa ²	0,01025697032 qa ²
E	-8,010849415 · 10 ⁻¹² qa ²	-9,086849550 · 10 ⁻¹² qa ²	-5,699247091 · 10 ⁻¹² qa ²	-5,205636592 · 10 ⁻¹² qa ²	-5,502914927 · 10 ⁻¹² qa ²	-5,165134517 · 10 ⁻¹² qa ²
F	-0,02446719935 qa ²	-0,02982988878 qa ²	-0,02830553498 qa ²	-0,01005001752 qa ²	-0,01031473796 qa ²	-0,01025697033 qa ²
G	-0,04457904641 qa ²	-0,04777901983 qa ²	-0,04733965667 qa ²	-0,02007467444 qa ²	-0,01990149181 qa ²	-0,02001190151 qa ²
H	-0,05742161769 qa ²	-0,05747157583 qa ²	-0,05771744284 qa ²	0,02819476372 qa ²	-0,02826921407 qa ²	-0,02817455064 qa ²
I	-0,06178340621 qa ²	-0,06145469583 qa ²	-0,06112991740 qa ²	0,03139920379 qa ²	-0,03198429556 qa ²	-0,03229964682 qa ²

При загрузке равномерно распределенной нагрузкой q процесс вычисления $M_x(y=a/2)$ и $N(y=a)$ сходится несколько медленнее, чем при определении прогибов (особенно это существенно для крутящих моментов N). Однако сходимость ряда не нарушена и при удержании всего десяти гармоник разложения функции в двойной ряд по синусу получены вполне приемлемые результаты. Максимальный изгибающий момент возникает M_x в центре нагрузки q , а крутящий момент N при $x=0$ (рисунок 4).

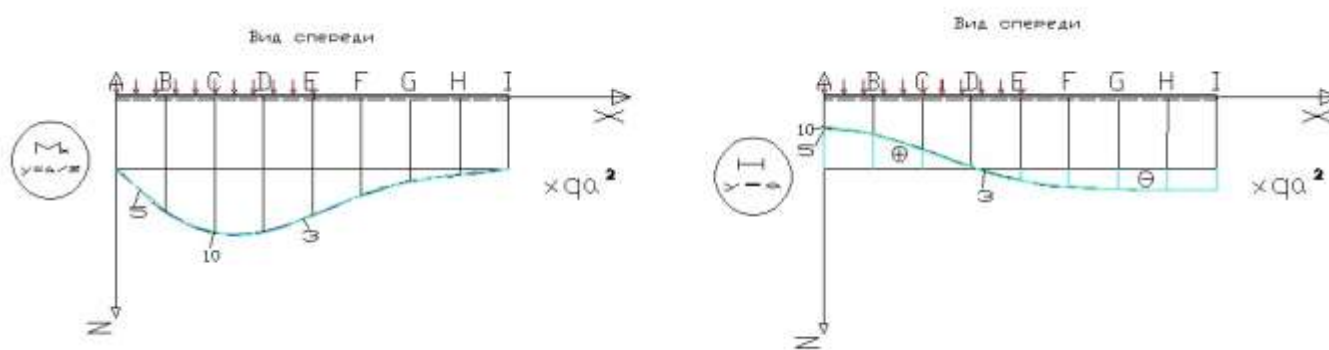


рисунок 4

При расчете от действия сосредоточенной силы F считалось, что сила распределена в пределах малой площади $dx \cdot dy$. Такая замена позволила воспользоваться алгоритмом расчета пластин в двойных тригонометрических рядах. Сходимость процесса вычисления прогибов при действии сосредоточенной силы происходит не так быстро, как в случае действия распределенной нагрузки. Составленный ряд для изгибающих моментов M_x сходится значительно медленнее, чем для прогибов, особенно вблизи приложения сосредоточенной силы F , а непосредственно под силой он расходится из-за стремления изгибающих моментов к бесконечности (рисунок 5).

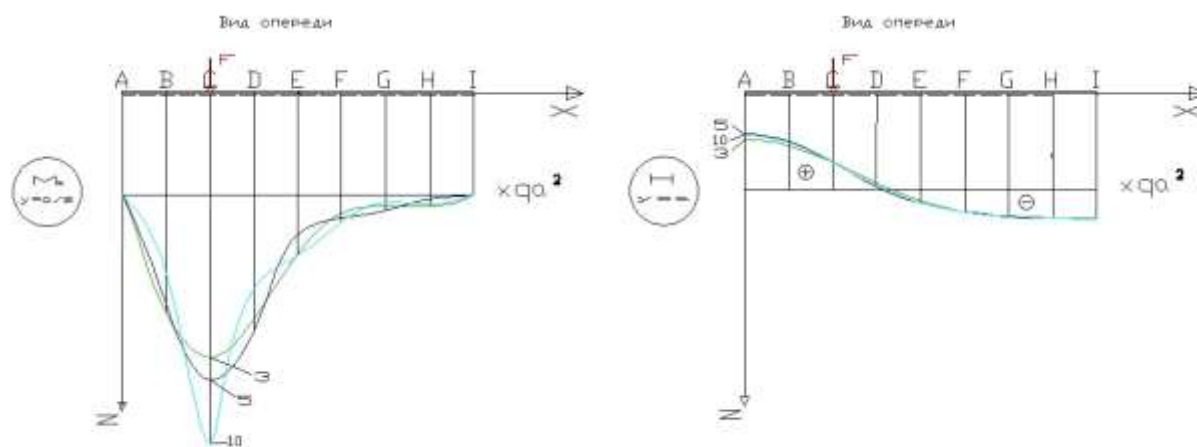


рисунок 5

То	От действия сосредоточенной силы F (равнодействующая) при n			От распределенной нагрузки q при n	
	60	40	10	60	10
	0	0	0	0	0
	0,02582936 491 qa ²	0,02460565 411 qa ²	0,01905411 520 qa ²	0,0248786262 9 qa ²	0,02502591 053 qa ²
	0,05949157 638 qa ²	0,05936161 350 qa ²	0,06889446 189 qa ²	0,0389054362 7 qa ²	0,03890229 565 qa ²
	0,12251101 07 qa ²	0,12591349 65 qa ²	0,11856251 19 qa ²	0,0458244605 7 qa ²	0,04580116 178 qa ²
	0,47751383 32 qa ²	0,43557796 98 qa ²	0,29242712 85 qa ²	0,0478859930 4 qa ²	0,04796699 559 qa ²
	0,12251101 04 qa ²	0,12591349 67 qa ²	0,11856251 17 qa ²	0,0458244605 9 qa ²	0,04580116 179 qa ²
	0,05949157 640 qa ²	0,05936161 348 qa ²	0,06889446 200 qa ²	0,0389054362 8 qa ²	0,03890229 565 qa ²
	0,02582936 543 qa ²	0,02460565 448 qa ²	0,01905411 626 qa ²	0,0248786263 0 qa ²	0,02502591 052 qa ²
	3,838731· 10 ⁻¹¹ qa ²	-1,308618· 10 ⁻¹¹ qa ²	-7,168972· 10 ⁻¹¹ qa ²	-3,386541· 10 ⁻¹¹ qa ²	-3,217178· 10 ⁻¹¹ qa ²

Данная особенность объясняется тем, что сила F сосредоточена в точке и для ее уравнивания интенсивность внутренних усилий на гранях элемента $dx \cdot dy$ возрастает до бесконечности. Для получения теоретически правильного результата, согласно которому изгибающий момент M_x под сосредоточенной силой стремится к бесконечности, необходимо удерживать большое число членов ряда. В качестве примера было удержано 40 и 60 членов ряда разложения для второго варианта загрузки (рисунок 6).

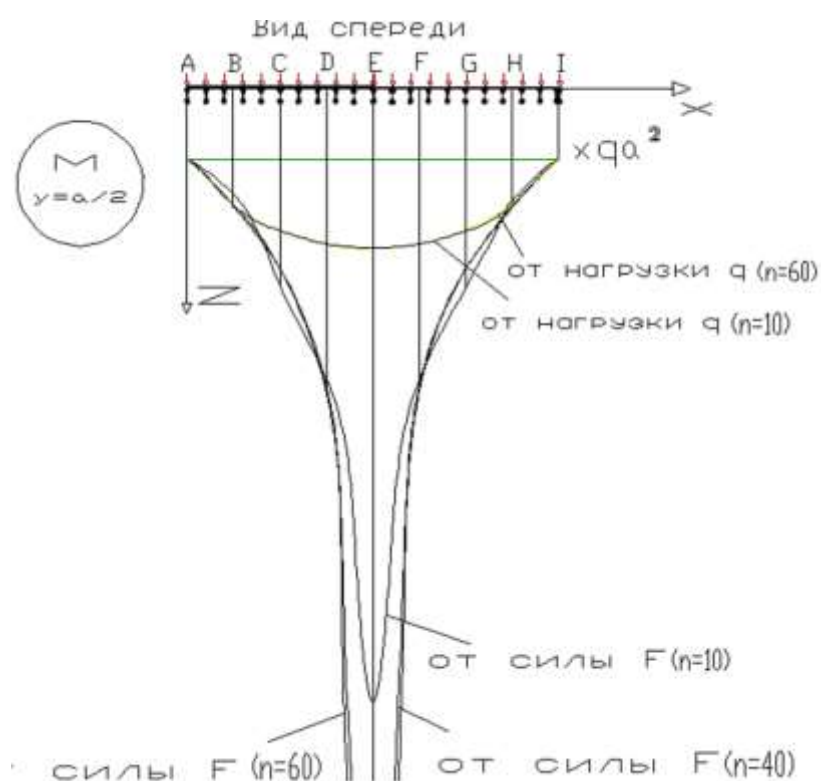


рисунок 6

Крутящие моменты H ($y=a$) от действия силы F сходятся медленнее, чем от действия равномерно распределенной нагрузки q , но сходимость ряда не нарушена. Максимальный крутящий момент $H(x=0)$ от действия силы F превышает $H(x=0)$ от действия нагрузки q .

Таким образом, в практических расчетах сосредоточенную силу необходимо распределять на конечной площади, что устранил разрывы во внутренних усилиях, улучшит сходимость рядов и приблизит работу элементов конструкции к реальной.

При анализе второго вопроса были выявлены следующие особенности:

В случае квадратной пластины, загруженной распределенной нагрузкой по всей поверхности (второй вариант загрузки), удержание трех членов ряда оказалось достаточным для достижения точности в 3% как в одинарном так и в двойном рядах при нахождении значений прогиба и изгибающего момента (здесь и далее рассматривался момент с индексом той оси, которая перпендикулярна большей стороне пластины) в центре пластины.

Далее была рассмотрена прямоугольная пластина с соотношением сторон $b=2a$ и распределенной по ее длине нагрузкой шириной $a/2$ симметрично относительно середины b (рисунок 7). Для достижения той же точности для нахождения прогибов при использовании метода одинарных рядов требуется удержать один член ряда, а для двойных рядов – 3. При нахождении изгибающих моментов три члена в обоих случаях. Так же были найдены значения крутящих моментов в угловых точках пластины – трех членов оказалось достаточно и в том и в другом случаях.

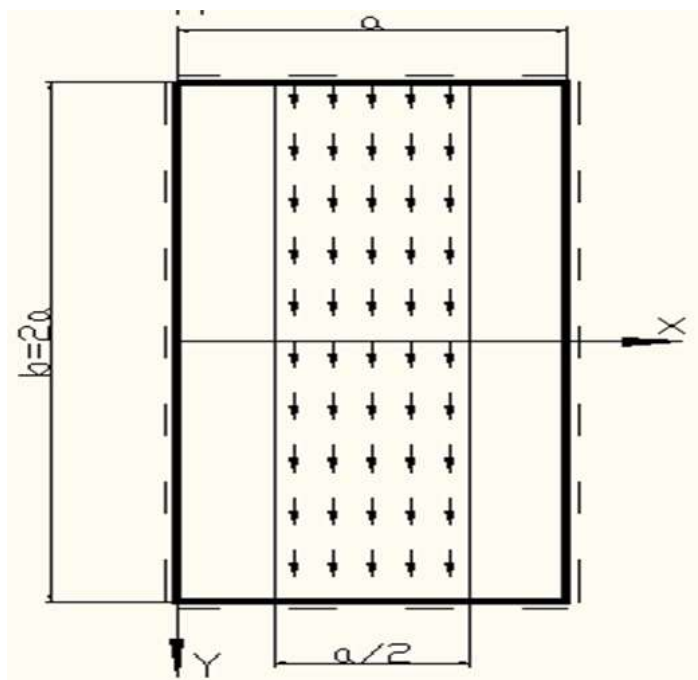


рисунок 7

Для определения степени влияния самой нагрузки была рассмотрена прямоугольная пластина с нагрузкой перпендикулярной оси b и шириной $a/2$ (рисунок 8). Для нахождения значений прогибов потребовалось удержать три члена в обоих случаях, а для изгибающего момента в одинарных рядах три, а для двойных - пять. Крутящий момент был найден при 5 членах в обоих случаях.

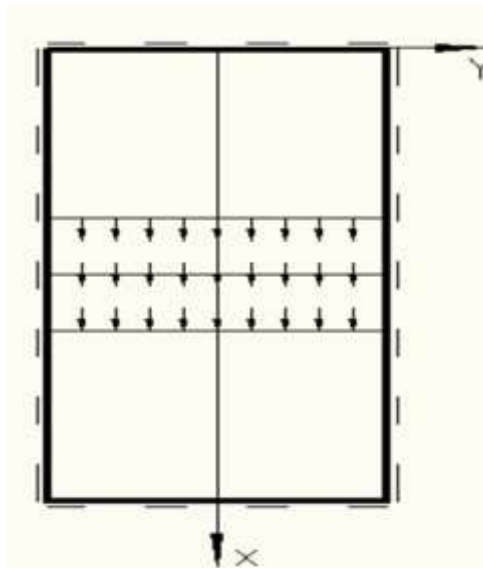


рисунок 8

Была проведена проверка на влияние перемены осей на точность – не обнаружено.

Часто возникает необходимость рассчитывать конструкцию на нагрузку, меняющуюся по линейному закону (гидростатическая нагрузка), что приводит к трудоемким ручным расчетам.

Поэтому, при рассмотрении пластины, загруженной распределенной нагрузкой, которая меняется по линейному закону (рисунок 9), можно существенно упростить решение.

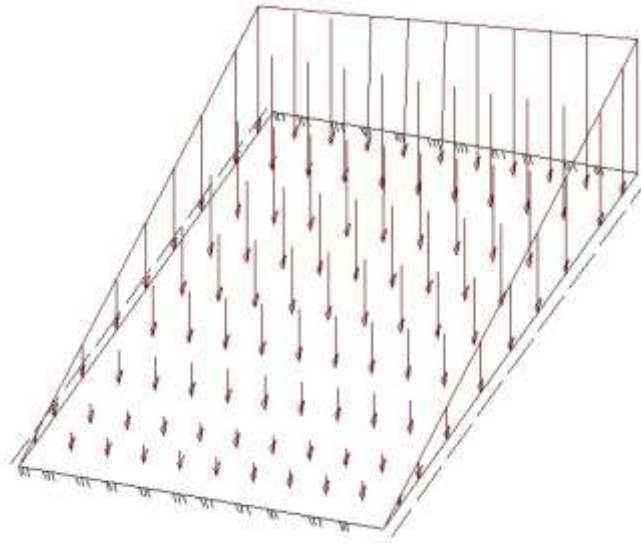


рисунок 9

Для этого целесообразно разбить решение на симметричное и кососимметричное. При таком подходе результат распределенной нагрузки на пластину равняется сумме результатов нагрузок на такую же пластину в том случае, если сложенные вместе они равны первоначальной, т. е. расхождений в результатах не наблюдается (рисунок 10).

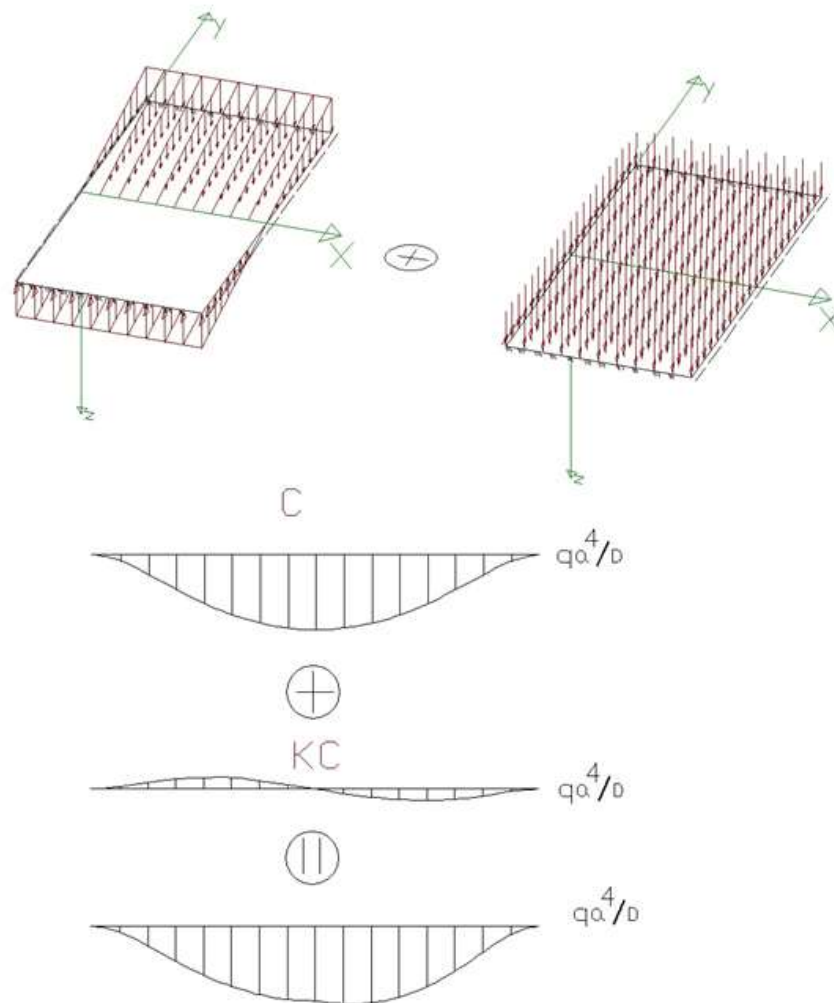


рисунок 11

Такой метод позволяет избегать решения системы уравнений с четырьмя неизвестными (постоянными).

При этом вклад симметричной составляющей нагрузки существенно больше кососимметричной.

Таким образом, на данном этапе можно сделать следующие выводы:

- 1) Сосредоточенную силу необходимо распределять на конечной площади, чтобы устранить разрывы во внутренних усилиях, улучшить сходимость рядов и приблизить работу элементов конструкции к реальной.
- 2) Для нахождения прогибов достаточно удержать три члена – вне зависимости от параметров распределенной нагрузки и самой пластины.
- 3) Изгибающие и крутящие моменты сходятся хуже – необходимо удерживать пять членов.
- 4) Перемена осей не влияет на конечный ответ.

Все полученные выше результаты справедливы для жестких пластин, у которых расчетный прогиб не превышает $\frac{1}{5}$ их толщины. Как правило, в реальных задачах (особенно при достаточно больших нагрузках) с целью уменьшения материалоемкости прогиб пластины может выходить за допустимые пределы. Если в процессе расчета $\frac{w}{\delta} > \frac{1}{5}$, то пластина начинает работать и на изгиб и как мембрана, т.е. наряду с изгибными напряжениями имеют место напряжения, равномерно распределенные по толщине (цепные напряжения). Значимость данных факторов становится одного порядка и ростом $\frac{w}{\delta}$ роль растяжения срединной поверхности возрастает, а значит, что в процессе расчета будет исключена гипотеза об отсутствии деформаций в срединной поверхности.

На основании гипотезы прямых нормалей (связь деформаций в плоскости слоя по Коши и деформаций срединной поверхности пластины) и уравнений равновесия бесконечно малого элемента пластины, загруженного равномерно распределенной нагрузкой (усилия, действующие в срединной поверхности, и усилия, вызывающие ее изгиб), получена система уравнений изгиба гибкой пластины.

$$\begin{cases} \frac{1}{E\delta} \cdot \left(\frac{\partial^2(N_x - \mu N_y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(N_y - \mu N_x)}{\partial x^2} - 2(1 + \mu) \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} \right) = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ D\nabla^4 w - N_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2S \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - N_y \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q \end{cases}$$

В качестве дополнительных уравнений были использованы соотношения между деформациями и усилиями в срединной поверхности, а так же между прогибом и изгибающими моментами

Для уменьшения числа разрешающих уравнений мы воспользовались функцией напряжений φ , действующих в срединной поверхности ($\Phi = \delta\varphi$).

$$N_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, N_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, S = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

Тогда система уравнений об изгибе гибкой пластины (уравнения Кармана) приобрела следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{E\delta} \cdot \nabla^4 \Phi - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \\ D\nabla^4 w - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = q \end{cases}$$

Пробовать вести решение относительно функции напряжений φ и прогиба гибкой пластины w на основе нелинейных уравнений Кармана можно различными приближенными методами решения краевых задач (методом конечных разностей, методом последовательных догрузений и т.д.).

В данной работе мы воспользовались МКР (метод конечных разностей) применительно к прямоугольной в плане стальной пластине, шарнирно опертой по краям. При этом вся область рассматриваемой пластины была порята сеткой (рисунок 12) и за неизвестные уравнения Кармана (функции φ и прогибы w), принимались значения в узлах сетки.

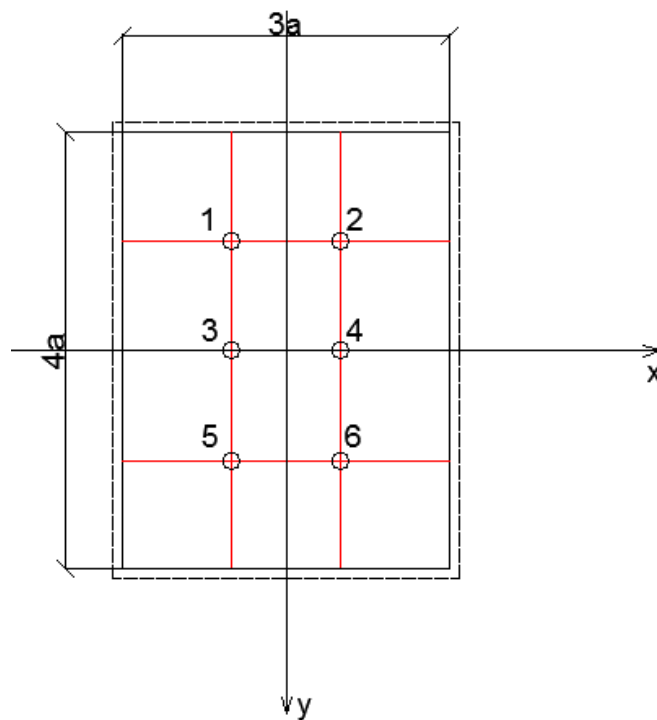


рисунок 12

На основании теоремы Тейлора, были получены приближенные формулы для производных от функции φ и прогиба w (конечно-разностные операторы), выраженные через узловые ординаты этих функций. Полученные операторы симметричны относительно их центра.

Граничные условия для шарнирно опертой плите также формулировались на основе конечно-разностных операторов. После составления уравнения Кармана, работающего по МКР, к каждой узловой точке пластины, была получена система нелинейных алгебраических уравнений для всей гибкой пластины.

Например для 1-ой точки полученная система имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{15\varphi_1\delta - 6\varphi_2\delta}{E\delta\Delta^4} - \left(\frac{w_2}{4\Delta^2}\right)^2 - \frac{w_1}{\Delta^2} \cdot \frac{w_2 - 2w_1}{\Delta^2} = 0 \\ \frac{D \cdot (11w_1 - 6w_2)}{\Delta^4} - \left(\frac{\varphi_2\delta - 2\varphi_1\delta}{\Delta^2}\right) \cdot \left(-\frac{w_1}{\Delta^2}\right) - 2 \cdot \left(\frac{\varphi_2}{4\Delta^2}\right) \cdot \left(\frac{w_2}{4\Delta^2}\right) - \left(\frac{\varphi_1\delta}{\Delta^2}\right) \cdot \left(\frac{\varphi_2 - 2\varphi_1}{\Delta^2}\right) = q \end{cases}$$

Поскольку точное решение полученных нелинейных дифференциальных уравнений возможно в исключительных случаях, поэтому дальнейшее решение велось приближенным методом Ньютона.

Пример реализации данного метода в программном комплексе Maple для точек 1 и 3 вышеуказанной пластины (рисунок 12) толщиной $\delta = 1 \text{ см}$, нагруженной равномерно распределенными нагрузками $q = 1 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ и $q = 100 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$, показан на рисунке 13.

```

> solve( {
   $\frac{1}{2100000} \cdot (15 \cdot f1 - 6 \cdot f2) + \frac{2 \cdot (w1)^2}{1} - \frac{(w2)^2}{16 \cdot 1} - \frac{(w1) \cdot (w2)}{1} = 0, \frac{250000 \cdot x^3}{1}$ 
   $\cdot (11 \cdot w1 - 6 \cdot w2) + \frac{(w1 \cdot f2 + w2 \cdot f1 - 4 \cdot w1 \cdot f1) \cdot x}{1} + \frac{2 \cdot w2 \cdot f2 \cdot x}{16 \cdot 1} = 1, \frac{1}{2100000 \cdot 1}$ 
   $\cdot (13 \cdot f2 - 12 \cdot f1) + \frac{2 \cdot (w2)^2}{1} - \frac{2 \cdot (w1) \cdot (w2)}{1} = 0, \frac{250000 \cdot x^3}{1} \cdot (11 \cdot w2 - 12 \cdot w1)$ 
   $- \frac{4 \cdot f2 \cdot w2 - 2 \cdot f1 \cdot w2 - 2 \cdot f2 \cdot w1}{1} \cdot x = 1$ 
} )
{f1 = -0.4160166244, f2 = -0.6810488959, w1 = 0.001387635685, w2 = 0.001877360304}

[
> evalf(%)
> solve( {
   $\frac{1}{2100000} \cdot (15 \cdot f1 - 6 \cdot f2) + \frac{2 \cdot (w1)^2}{1} - \frac{(w2)^2}{16 \cdot 1} - \frac{(w1) \cdot (w2)}{1} = 0, \frac{250000 \cdot 1^3}{1}$ 
   $\cdot (11 \cdot w1 - 6 \cdot w2) + \frac{(w1 \cdot f2 + w2 \cdot f1 - 4 \cdot w1 \cdot f1) \cdot 1}{1} + \frac{2 \cdot w2 \cdot f2 \cdot 1}{16 \cdot 1} = 100, \frac{1}{2100000 \cdot 1}$ 
   $\cdot (13 \cdot f2 - 12 \cdot f1) + \frac{2 \cdot (w2)^2}{1} - \frac{2 \cdot (w1) \cdot (w2)}{1} = 0, \frac{250000 \cdot 1^3}{1} \cdot (11 \cdot w2 - 12 \cdot w1)$ 
   $- \frac{4 \cdot f2 \cdot w2 - 2 \cdot f1 \cdot w2 - 2 \cdot f2 \cdot w1}{1} \cdot 1 = 100$ 
} )
> evalf(%)
{f1 = -0.00416091867776398, f2 = -0.00681191763701343, w1 = 0.000138775509039243, w2
= 0.000187755100133056}

```

рисунок 13

Последовательно изменяя толщину пластины в диапазоне $0,1\text{ мм} < \delta < 4\text{ мм}$, получены зависимости изменения прогибов пластины (рисунок 12) в точках 1 и 3, загруженной равномерно распределенными нагрузками $q = 1 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ (рисунок 14) и $q = 100 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ (рисунок 15).

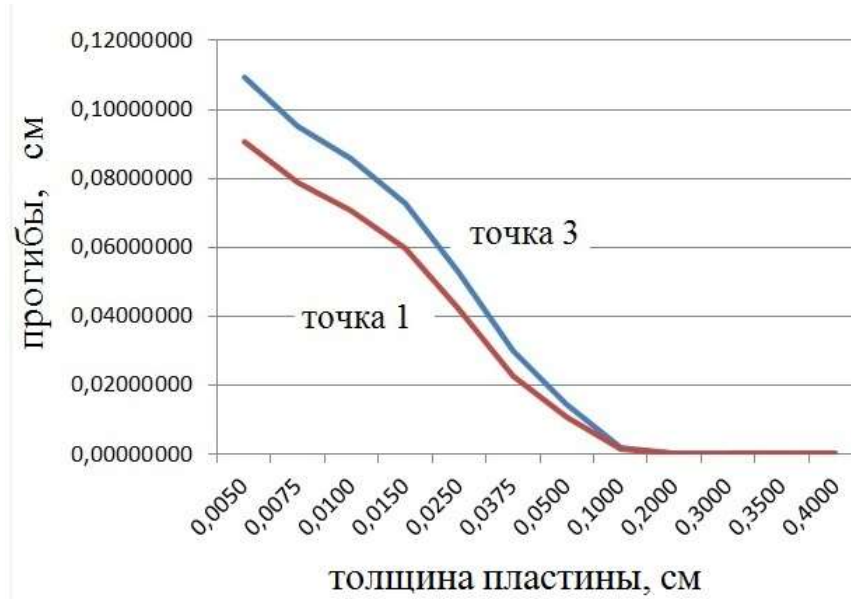


рисунок 14

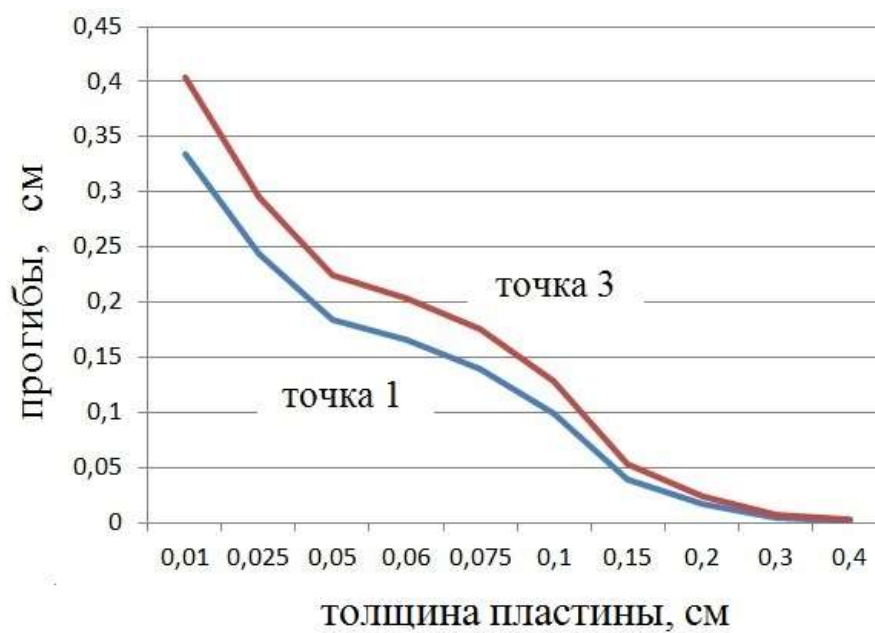


рисунок 15

Аналогичная работа была проделана методом конечном элементов в программном комплексе Femap v 10.3 (рисунок 16).

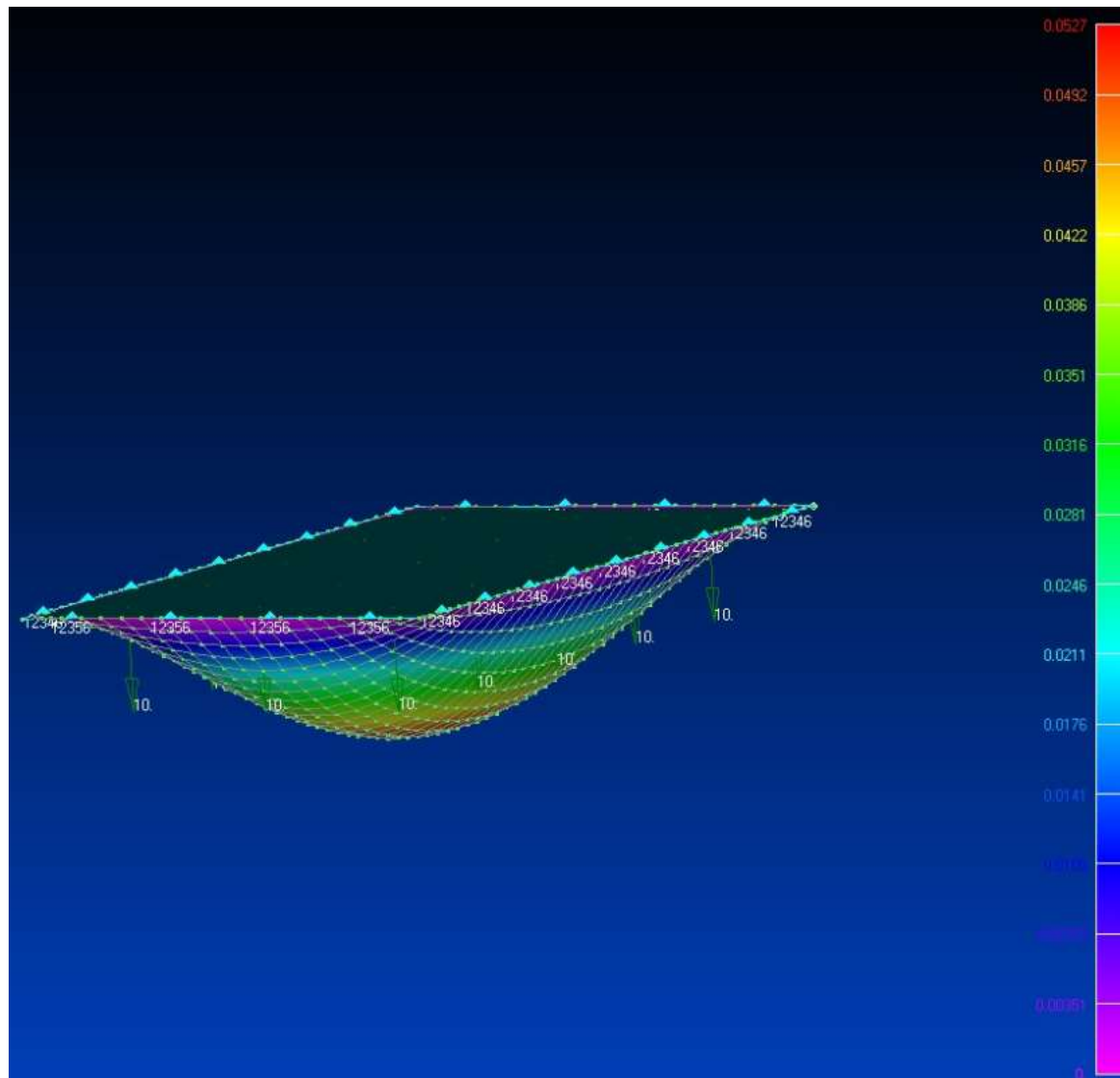


рисунок 16

На данном этапе второй части работы (анализ гибких пластин) получено, что при решении уравнения изгиба гибкой прямоугольной в плане пластины (уравнения Кармана) методом конечных разностей между изменением прогибов и изменением толщины гибкой пластины получены однозначные зависимости. При сравнительно большой толщине гибкой пластины ($\delta > 2 \text{ мм}$) изменение прогибов пластине пропорционально изменению ее толщины при постоянной равномерно распределенной нагрузке. Если же толщина пластины становится $\delta < 1 \text{ мм}$, то зависимость перестает выполняться.

Так же зависимость перестает выполняться, когда нагрузка для исследуемой пластины(диапазон $0,1 \text{ мм} < \delta < 4 \text{ мм}$) становится более $q = 100 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$.

Таким образом, для приближенных расчетов гибких пластин (ручных расчетов) метод конечных разностей вполне применим, но его особенности требуют дальнейшего изучения.