



# ОТЧЕТ

ИНСТИТУТ ПУТИ, СТРОИТЕЛЬСТВА И СООРУЖЕНИЙ (ИПСС МИИТ)  
КАФЕДРА «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

## ИТОГОВЫЙ ОТЧЕТ

*Автор: доц., к.ф.-м.н, МИИТ-ИПСС  
Захаров Д.Д.*

г. Москва  
2013

## Введение

Заявленный Проект был нацелен на решение 2-х фундаментальных вопросов, возникающих в инженерной практике неразрушающего контроля элементов конструкций акустическими методами.

Для этого предполагалась разработка метода эффективного моделирования трехмерных волновых полей перемещений и напряжений в элементах конструкций для коротких волн (что в реальной практике соответствует частотам порядка МГц и длинам волн порядка мм в металлах). При этом допускается слоисто-неоднородная структура элемента конструкции и возможные вязкоупругие свойства.

Далее предполагалось создание численно-аналитического метода расчета излучаемого и отраженного поля, позволяющего исследовать локальную область конструкции с выявленной неоднородностью вместо расчета всей геометрической области элемента конструкции большой размерности. Разрабатываемая в Проекте методика расчета и анализа волновых полей должна сочетать оригинальные аналитические, асимптотические и численные подходы, позволяющая существенно улучшить инженерное моделирование элементов конструкций и выявлять главные физические компоненты для процессов с характерным масштабом порядка длины волны.

Предполагалось увеличить эффективность метода на 2-3 порядка без потери точности в сравнении с альтернативными подходами, увеличить надежность моделировании задач неразрушающего контроля и сократить время анализа.

Согласно заявленному Проекту программа исследований была условно разделена на 2 этапа.

**1-й этап программы** предусматривал:

– Исследование структуры трехмерных собственных волн (в том числе с неплоским фронтом), распространяющихся в элементе конструкции и представление произвольного поля в виде разложения по таким волнам. Для этого предлагалось вывести трехмерные соотношения обобщенной ортогональности (ТСОО) для волн, с учетом усложненной структуры элемента конструкции в виде возможной неоднородности и поперечной анизотропии, а также при наличии функционально-градиентных материалов с непрерывной зависимостью параметров среды от координаты;

– Исследование индивидуального вклада каждой собственной волны в поле, излучаемое источником (ультразвуковым трансдьюсером), или рассеянного дефектом в элементе конструкции;

– асимптотический анализ такого вклада в основных геометрических зонах и пограничных слоях с целью прояснения физической картина поля, и получения в замкнутом виде коротковолновых асимптотик, позволяющих рассчитывать компоненты поля в масштабе порядка длины волны.

– Разработку методики снижения размерности задач расчета элементов конструкций и технологических узлов сложной геометрии для нужд неразрушающего контроля, для чего получить трехмерные неотражающие граничные условия на основании предыдущих результатов в виде (а) параметризованной модальной формулировки и (б) формулировки для полного поля, где параметром служит точка виртуальной границы уменьшенной области.

**2-й этап программы** предполагал разработку численно аналитических методов и быстрых алгоритмов расчета волновых полей в элементах конструкций, с комбинированным использованием результатов 1-го этапа.

Основным итогом должно было стать снижение размерности рассматриваемых динамических задач без потери точности и надежности с ростом скорости алгоритмов на 2-3 порядка по сравнению с другими имеющимися методиками:

– При расчете излучаемого сигнала, генерируемого в элементе конструкции 3-х мерным ультразвуковым источником (трансдюсером) с эффективным использованием коротковолновых асимптотик вместо конечно-элементных или сеточных методов;

– При расчете «отклика» элемента конструкции, т.е. отраженного и рассеянного поля источника с эффективным использованием неотражающих граничных условий, позволяющих рассчитывать локальную область конструкции с исследуемой неоднородностью, а не весь объем конструкции.

Ниже приведено изложение полученных при выполнении Проекта результатов.

В приложении даны отсканированные первые страницы публикаций, вышедших из печати за отчетный период.

## 1. Соотношения обобщенной ортогональности для трехмерных собственных волн в элементах конструкций и выделение индивидуальных вкладов собственных волн в излучаемом и рассеянном поле

Основным теоретическим инструментом избрано представление исследуемого поля в виде разложения по *собственным волнам* (СВ). Наиболее актуальными являются два типа геометрии элемента конструкции (см. примеры на Рис.1а,б): протяженные цилиндрические тела (различного сечения балки, колонны, трубы, опоры и т.д.) и толстые пластины (несущие плиты).

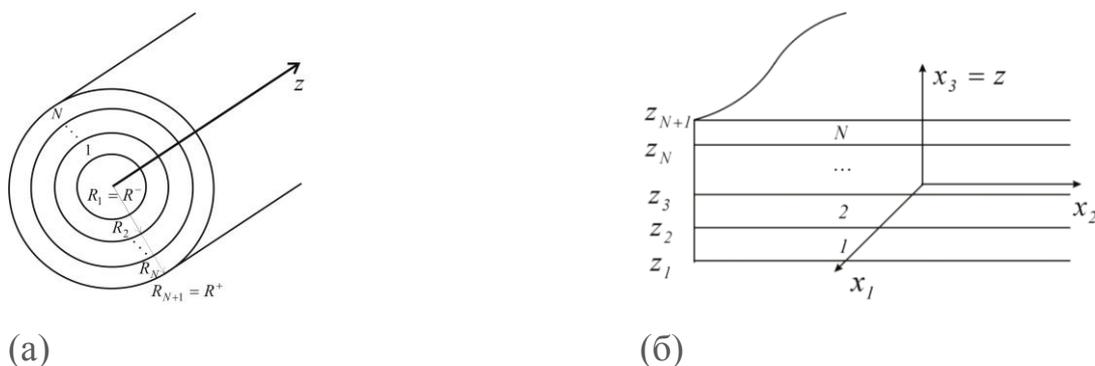


Рис. 1.

*Допускается слоисто-неоднородная структура сечения и возможная анизотропия свойств в направлении оси  $z$ . Число слоев произвольно, материалы слоев считаются идеально упругими.*

Известно, что гармонические во времени СВ ( $e^{-i\omega t}$ ), распространяющиеся в таких элементах конструкции вдоль образующей, могут иметь как вещественные, так и комплексные волновые числа  $k$ . Математическое следствие этого факта состоит в отсутствии для СВ свойства ортогональности в обычном смысле – подобно рядам Фурье – тогда как необходимо уметь выделять индивидуальный вклад каждой волны.

В предыдущих работах (Ю.А. Бобровницкий, М.В. Федорюк, W. Fraser и др.) было показано, что в цилиндрических телах и в двумерных полосах для волновых чисел  $k_l^2 \neq k_m^2$  СВ удовлетворяют так называемому *свойству обобщенной ортогональности (СОО)*

$$W_{lm}^* = 0, \quad \text{где } W_{lm}^* \equiv \sum_j \int_S \{ \sigma_{\alpha z}^l u_\alpha^m - \sigma_{zz}^m u_z^l \} n_\beta dS, \quad (1.1)$$

где произведения компонент напряжений  $\sigma_{\alpha\beta}^l$ , перемещений  $u_\alpha^l$ , и нормали  $n_\beta$  к сечению тела интегрируются по площади сечения  $S$ . Отметим, что в силу достаточно произвольной зависимости от координат в сечении сами СВ трехмерные, но само сечение  $S$  – плоское.

Для волн в плитах СВ могут иметь неплоский «фронт» и первые *трехмерные соотношения ортогональности (ТСОО)* для таких волн были получены автором для изотропных пластин. В данной работе построено обобщение ТСОО на случай слоистых плит с возможной анизотропией свойств и функционально-градиентных материалов. Также рассмотрены предельные переходы к двумерным СОО для элементов конструкций в условиях сложного нагружения.

В Проекте было получено общее представление перемещений трехмерных СВ в каждом слое в цилиндрических координатах  $r, \theta, z$  в виде

$$u_r = \left[ -uB'_n + w \frac{n}{kr} B_n \right] \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{Bmatrix}, \quad u_\theta = \left[ u \frac{n}{kr} B_n - wB'_n \right] \begin{Bmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix}, \quad u_z = vB_n \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{Bmatrix}, \quad (1.2)$$

где  $B_n \equiv B_n(kr)$  есть любая цилиндрическая функция (для определенности, далее – функции Ханкеля первого или второго рода) и  $u(z)$ ,  $v(z)$ ,  $w(z)$  удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям движения

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{d}{dz} \left( \mu_0 \frac{d}{dz} w \right) + \frac{1}{\delta_0} \left( \frac{\rho \omega^2}{\mu} - k^2 \right) w = 0,$$

$$\left[ \frac{1}{\mu_0} \frac{d}{dz} \left( \mu_0 \frac{d}{dz} u \right) + \left( \frac{\rho \omega^2}{\mu_0} - \frac{\alpha_*}{\delta_0} k^2 \right) u \right] - k \left[ \frac{1}{\mu_0} \frac{d}{dz} (\mu_0 v) + \frac{\beta_0}{\delta_0} \frac{d}{dz} v \right] = 0,$$

$$\left[ \frac{1}{\mu_0} \frac{d}{dz} \left( \varepsilon_0 \frac{d}{dz} v \right) + \left( \frac{\rho \omega^2}{\mu_0} - k^2 \right) v \right] + k \left[ \frac{1}{\mu_0} \frac{d}{dz} (\lambda_0 u) + \frac{d}{dz} u \right] = 0,$$

с модулями упругости  $\mu_0$ ,  $\lambda_0$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$ , плотностью  $\rho$  и частотой  $\omega$ .  
Постоянные  $\alpha_*$ ,  $\delta_0$ ,  $\beta_0$  суть отношения упругих модулей. Аналогичные «проеекционные» функции  $\chi(z)$  и  $\tau(z)$  появляются в представлении для напряжений

$$\sigma_{rr} = \mu \left\{ \chi B_n - \frac{u}{r} [(n+1)B_{n+1} + (n-1)B_{n-1}] - \frac{k w}{2} [B_{n+2} - B_{n-2}] \right\} \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{Bmatrix},$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{\mu k}{2} \{ u [B_{n-2} - B_{n+2}] - w [B_{n+2} + B_{n-2}] \} \begin{Bmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix},$$

(1.3)

$$\sigma_{rz} = \mu \left\{ -\tau B'_n + \frac{dw}{dz} \frac{n}{sr} B_n \right\} \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{Bmatrix} \quad \left( \chi \equiv \beta \frac{dv}{dz} + ak u, \tau \equiv \frac{du}{dz} - kv \right).$$

Дифференциальные уравнения необходимо дополняются однородными граничными условиями на лицевых поверхностях плиты одного из следующих видов:

Отсутствие напряжений (свободная поверхность);

Отсутствие перемещений (жесткое защемление);

«Перекрестные» граничные условия, т.е. в некоторых направлениях отсутствуют перемещения, а в оставшихся – напряжения.

Общим является полное отражение энергии от границы с такими условиями внутрь элемента конструкции.

На границах раздела сред дополнительными граничными условиями являются:

Условия полного сцепления слоев;

Или условия частичного сцепления слоев, т.е. часть граничных перемещений и/или напряжений непрерывна, а прочие равны нулю.

Перечисленные однородные граничные условия позволяют описать широкий класс реальных инженерных задач для элемента конструкции и обобщают условия полного контакта, свободного опирания, контакта с проскальзыванием и т.д.

Эти граничные условия имеют прозрачный физический смысл и записываются в проекционных функциях, откуда получается матричная задача на собственные значения – волновые числа  $k$ .

При постоянных значениях модулей упругости и плотностей система обыкновенных дифференциальных уравнений движения позволяет получить функции  $u(z)$ ,  $v(z)$ ,  $w(z)$  в замкнутом виде, а дополнительные граничные условия – определить их с точностью до одной неизвестной константы (амплитуды волны). Полученная система решений – собственных волн, является полной.

Автором показано, что при любых комбинациях перечисленных граничных условий, все волновые числа – решения задачи на собственные значения, разделяются на два класса, обозначаемые далее PSV и SH по аналогии с волнами различной поляризации

$$\begin{cases} k \in \text{PSV} : w = 0; & u, v \neq 0 \\ k \in \text{SH} : u = v = 0; & w \neq 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Спектр волновых чисел обладает также свойствами симметрии: для идеально упругих материалов волновые числа располагаются симметрично по квадрантам комплексной плоскости.

Выведенные TCOO записываются в терминах проекционных функций в каждом из слоев  $j = 1, 2, \dots, N$ :

$$k_l, k_m \in \text{SH} : T_{lm}^* \equiv \sum_j \mu^j (w_l^j, w_m^j) = 0, \quad (1.5)$$

$$k_l, k_m \in \text{PSV} : W_{lm}^* \equiv \sum_j \mu^j \{ (\chi_l^j, u_m^j) - (\tau_m^j, v_l^j) \} = 0, \quad (1.6)$$

$$k_m \in \text{SH}, k_l \in \text{PSV} : G_{lm}^* \equiv \sum_j \mu^j \left\{ (p_l^j, w_m^j) - \left( v_l^j, \frac{d}{dz} w_m^j \right) + \frac{k_l^2 - k_m^2}{k_l} (u_l^j, w_m^j) \right\} = 0, \quad \text{где}$$

$$p \equiv \beta \frac{dv}{dz} + \gamma k u. \quad (1.7)$$

Круглые скобки в формулах (1.5)–(1.7) означают интегрирование по толщине  $j$ -го слоя от произведения функций внутри скобок. ТОО (1.5) и (1.6) имеют аналоги с известными ранее двумерными ТОО и могут применяться порознь в волнам с SH и PSV поляризацией, соответственно. ТОО (1.7) ранее известно не было; данное ТОО применимо к волнам с различной поляризацией.

Полученные результаты (1.2)–(1.7) обобщены на 4 вида сред:

Линейно-упругие материалы с возможной поперечной анизотропией свойств для плиты (или полосы), или с анизотропией вдоль образующей для цилиндра (см. начало параграфа);

Линейно-вязкоупругие материалы с аналогичной анизотропией. В отличие от обычных идеально упругих материалов волновые числа располагаются на комплексной плоскости симметрично относительно начала отсчета;

Рассмотрен предельный переход к *функционально-градиентным материалам* и показано, что свойства (1.2), (1.3) и ТОО (1.5)–(1.7) сохраняют силу и в случае зависимости упругих и вязких параметров слоев от координаты  $z$ . Заметим, что в этом случае функции  $u(z)$ ,  $v(z)$ ,  $w(z)$  определяются, вообще говоря, как численные решение уравнений движения.

Рассмотрен предельный переход к акустическим слоям (контакт с идеальной жидкостью). В этом случае корректируется только ТОО (1.6), которое примет вид

$$W_{lm}^* \equiv \sum_{j=1}^N \mu^j \{(\chi_l^j, u_m^j) - (\tau_m^j, v_l^j)\} - \sum_{i=1}^{N_0} \lambda^{0i} (p_l^{0i}, u_m^{0i}),$$

(1.8)

где верхним значком 0 помечены проекционные компоненты перемещения  $u_m^{0i}$  и давления  $p_l^{0i}$  в жидком слое с номером  $i$  и  $\lambda^{0i}$  – коэффициент сжимаемости жидкости. Если пренебрегать сжимаемостью жидкости, то в (1.8) достаточно взять размерную компоненту давления, опустив коэффициент сжимаемости.

Выявлена физическая природа полученных ТСОО, как с точки зрения переносимой волной энергии, так и с точки зрения специфических видов нагружения в поперечном сечении элемента конструкции:

Получены в явном виде выражения для потока мощности  $P_{rl}^*$  каждой индивидуальной волны (с вещественными волновыми числами), среднего за период и переносимого через цилиндрическую поверхность, охватывающую начало координат:

$$P_{rl}^* = \begin{cases} \pm \varepsilon_n \omega T_{ll}^* & \text{qPSV} \\ \pm \varepsilon_n c_l W_{ll}^* & \text{SH} \end{cases}, \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 2, & n \geq 1 \\ 1, & n = 0 \end{cases}, \quad c_l = \omega k_l^{-1}. \quad (1.9)$$

Показана аддитивность потока мощности в случае суперпозиции волн.

Выведен аналог формулы Леонтовича-Лайтхилла, показывающей, что знак потока мощности определяется знаком групповой скорости волны:

$$P_{rl}^* \sim \pm c_g^l \{K_l + E_l\}^*, \quad R \rightarrow +\infty, \quad c_g^l \equiv \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{s=s_l}. \quad (1.10)$$

Верхний и нижний знаки в формулах отвечают выбору функции Ханкеля первого или второго рода, соответственно. Детально эти вопросы обсуждены в [1] и более громоздкие выкладки здесь опущены.

*В приложении к задачам неразрушающего контроля (НК) элементов конструкций, разработанный аппарат ТСОО позволяет в замкнутом виде выделять из исследуемого трехмерного волнового поля индивидуальный*

вклад каждой собственной волны и адекватно использовать его в соответствии с принципом излучения (от источника).

В частности, при известном распределении объемной нагрузки  $f_\alpha^j$  или поверхностной нагрузки  $\sigma_{\alpha\beta}$  (на лицевых поверхностях  $\Omega_1^-$  и  $\Omega_N^+$  крайних слоев) в источнике конечного размера, ТСОО позволяют определить коэффициенты излучаемых СВ в элемент конструкции вне некоторого виртуального цилиндра  $\Omega$  (т.е. на некотором сколь угодно малом расстоянии от см. Рис.2) следующим образом:

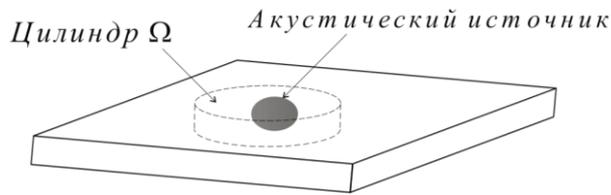


Рис. 2.

$$\begin{bmatrix} u_r^j \\ u_\theta^j \\ u_z^j \end{bmatrix} = \sum_{\substack{\{k_l \in PSV, SH\} \\ n \in \{0, 1, 2, \dots\}}} \begin{bmatrix} \left( -u_l^j(z) B_n'(k_l r) + w_l^j(z) \frac{n}{k_l r} B_n(k_l r) \right) (M_n^{l,c} \cos n\theta - M_n^{l,s} \sin n\theta) \\ \left( u_l^j(z) \frac{n}{k_l r} B_n(k_l r) - w_l^j(z) B_n'(k_l r) \right) (M_n^{l,c} \sin n\theta + M_n^{l,s} \cos n\theta) \\ v_l^j(z) B_n(k_l r) (M_n^{l,c} \cos n\theta - M_n^{l,s} \sin n\theta) \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} M_n^{l,cs} = -i\pi k_l \Gamma_{ln} \{2\varepsilon_n W_{ll}^*\}^{-1}, & k_l \in PSV, \\ M_n^{l,cs} = -i\pi \Gamma_{ln} \{2\varepsilon_n T_{ll}^*\}^{-1}, & k_l \in SH, \end{cases} \quad (1.11)$$

$$\Gamma_{ln} \equiv \left\{ \iint_{\Omega_1^-} + \iint_{\Omega_N^+} \right\} \{ \sigma_{\alpha\beta} u_\alpha - \sigma_{\alpha\beta} u_{\alpha l} \}^{cs} n_\beta dA - \sum_j \iiint_{\Omega^j} \{ f_\alpha^j u_{\alpha l}^j \}^{cs} dV.$$

Заметим также, что ряды по собственным волнам могут «сворачиваться» к относительно компактным формулам с помощью формул Графа для суммирования цилиндрических функций [1, 3, 5].

Результаты п.1 частично опубликованы в [1–3].

## **2. Построение высокочастотной асимптотики волнового поля, излучаемого в слоистый элемент конструкции ультразвуковым источником.**

В п.2 была решена задача построения высокочастотной асимптотики трехмерного поля, излучаемого в слоистую плиту поверхностным источником. Задача в частотной области моделирует реальную проблему неразрушающего контроля (НК) по расчету трехмерных полей высокочастотных ультразвуковых источников (трансдюсеров), создаваемых в «прозвучиваемом» объекте. Характерный масштаб поля сопоставим с длиной волны, геометрия области нагружения произвольна.

Рассмотрены следующие качественно различные ситуации для источников:

Область нагружения с гладкой границей;

Область нагружения с угловыми точками.

В практике НК технологические формы поверхности излучающего кристалла (трансдюсера) имеют вид круга или прямоугольника при нормальном контакте, либо их проекций при излучении под углом через проводящий канал (рис.1а), т.е. эллипса или прямоугольника. При излучении под углом имеет место «набег» фазы вдоль большей полуоси эллипса или большей стороны прямоугольника. Таким формам в исследовании было уделено особое внимание.

Концепция моделирования поля излучателя представлена на Рис. 3–4:

Сначала решается локальная задача об определении нагрузки в пятне контакта трансдюсер-поверхность объекта (с учетом жидких прослоек – гелей);

Затем строится отклик – поле излучаемое в исследуемое тело (в частотной области);

После чего по заданной спектрограмме сигнала методом гармонического синтеза строится полное излучаемое поле в реальном времени.

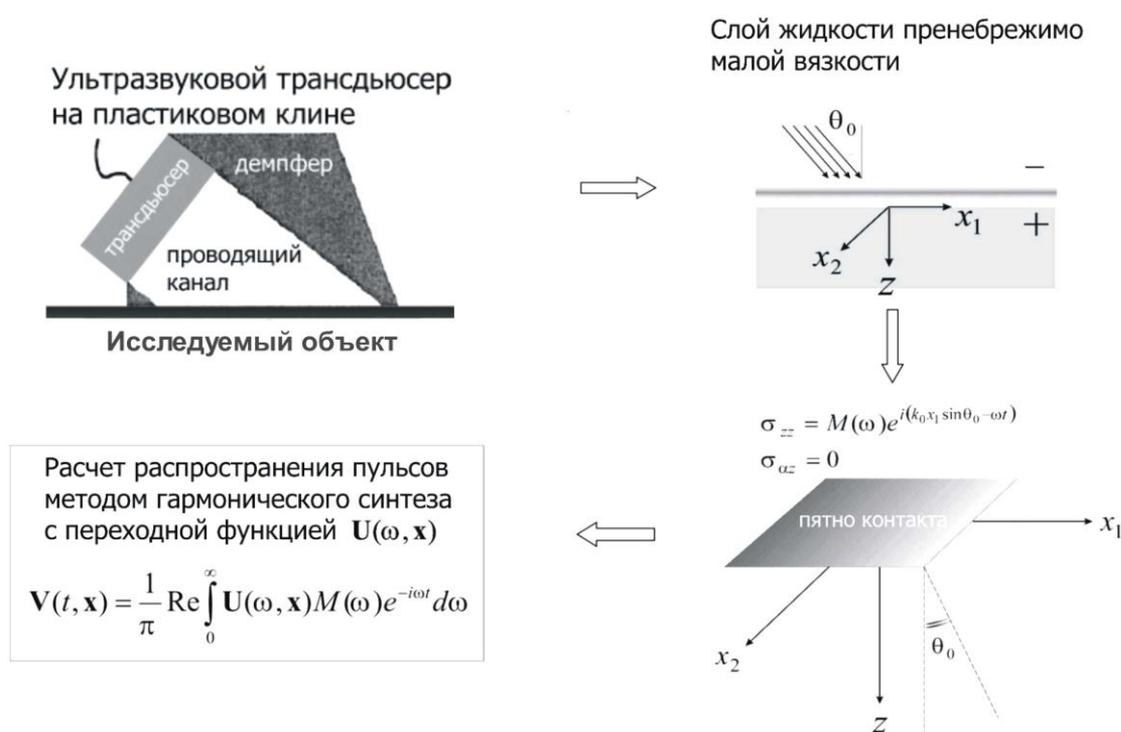


Рис. 3.

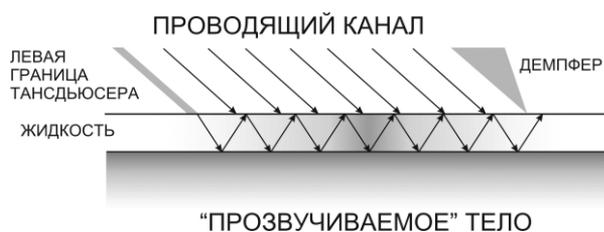


Рис. 4. «Лучевая» локальная модель поля в пятне контакта трансдюсер - жидкая прослойка - поверхность исследуемого объекта.

Основным элементом здесь является решение задачи в частотной области (в области коротких волн и высоких частот) и именно оно определяет эффективность модели. Конечно-элементные и сеточные методы в данном масштабе оказываются крайне затратными.

В заявленном Проекте для построения такой эффективной модели применен метод *разложения искомого поля по собственным волнам*, с использованием результатов п.І позволившие выделить *индивидуальные вклады каждой собственной волны* в излучаемое поле в следующем виде

$$\begin{bmatrix} u_\beta^j \\ u_3^j \end{bmatrix} = \sum_{k_l \in PSV_\Delta} \pm \frac{ik_l}{4W_{II}^*} v_l^N(z^+) \begin{bmatrix} u_l^j(z) & 0 \\ 0 & v_l^j(z) \end{bmatrix} \iint_{\Omega_N^+} \sigma_{zz}^+(x'_1, x'_2) \begin{bmatrix} H_1(k_l |\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}'|) \frac{x_\beta - x'_\beta}{|\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}'|} \\ H_0(k_l |\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}'|) \end{bmatrix} dA,$$

(2.1)

после чего отдельно найдены *асимптотически главные части* для каждой из них. Здесь, для определенности, считается, что источник помещен на верхней границе  $N$ -го слоя,  $H_n(k_l |\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}'|)$  означает функция Ханкеля 1-го или 2-го рода, выбираемую в соответствии с принципом излучения; где  $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, z^+)$ ,  $\mathbf{x}^+ = (x_1, x_2, z^+)$ ,  $\beta = 1, 2$ . Ниже полагаем  $k = k_l$ , а нагрузку в области  $\Omega_N^+$  на лицевой поверхности зададим с использованием эффективного угла  $\gamma$ , зависящего от соотношения фазовых скоростей волн

$$\sigma_{zz}^+(x'_1, x'_2) = M(\omega) e^{ikx'_1 \sin \gamma}, \quad \sigma_{\beta z}^+ = 0,$$

$$\sin \gamma = \frac{k_S}{k} \sin \theta_S^{in} = \frac{c}{c_S} \sin \theta_S^{in} < 1, \quad \text{при } \frac{c}{c_S} < 1.$$

Для определенности, далее полагаем, что фазовая и групповая скорости при  $\text{Re} k_l \geq 0$  имеют один знак; в противоположном случае во все последующих результатах угол  $\gamma < 0$ .

Такая ситуация типична при рассмотрении полей ультразвуковых трансдьюсеров, как нормальных ( $\theta_S^{in} = 0$ ), так и фазированных ( $\theta_S^{in} \neq 0$ ).

Ключевым здесь оказывается исследование интеграла свертки

$$J = \iint_{\Omega_N^+} e^{ikx'_1 \sin \gamma} \mathbf{g}(\mathbf{x}', \mathbf{x}^+) dx'_1 dx'_2,$$

проведенное с использованием двумерного метода стационарной фазы и лучевых асимптотик.

По виду главных членов асимптотики для каждой волны результат классифицируется следующим образом:

По диаграмме интенсивности поля для области с гладкой границей (круглое или эллиптическое пятно контакта под трансдьюсером, см. Рис.3-4). Методом стационарной фазы из рассмотрения интеграла свертки с быстроосциллирующим множителем получена равномерная асимптотика поля. Решение доведено до простых выражений компонент поля в элементарных функциях.

По виду геометрических зон для области нагружения с угловыми точками. В данном случае это пятно контакта в виде прямоугольной области (Рис. 5а, вид сверху), для которого выделяются 2 типа основных зон, одна вспомогательная зона, и характерные области согласования зон – пограничные слои. Этот результат более интересен и приводится ниже более детально. Наиболее сложная ситуация реализуется при докритическом значении угла  $\gamma$ .

Зоны в виде продольных полос (Рис. 5б, решения  $J_1^{\mp}$ ) или направленных под углом полос (Рис.5в, решения  $J_2^{\mp}$ ). В этих областях главная часть асимптотики имеет вид квазиплоских волн максимальной интенсивности, т.е. внутри области отклик соответствует плоской волне, аналогичной распространяющейся в полосе от границы пятна контакта.

Следующие по интенсивности зоны располагаются вне этих полос, основной вклад там дают волны с цилиндрическим фронтом (Рис.5г, решения  $J_{12}(\mathbf{x}_c)$ ). Волны определены всюду за исключением границ полос. Структура цилиндрических волн аналогична волнам от сосредоточенной нагрузки в каждой из угловых точек.

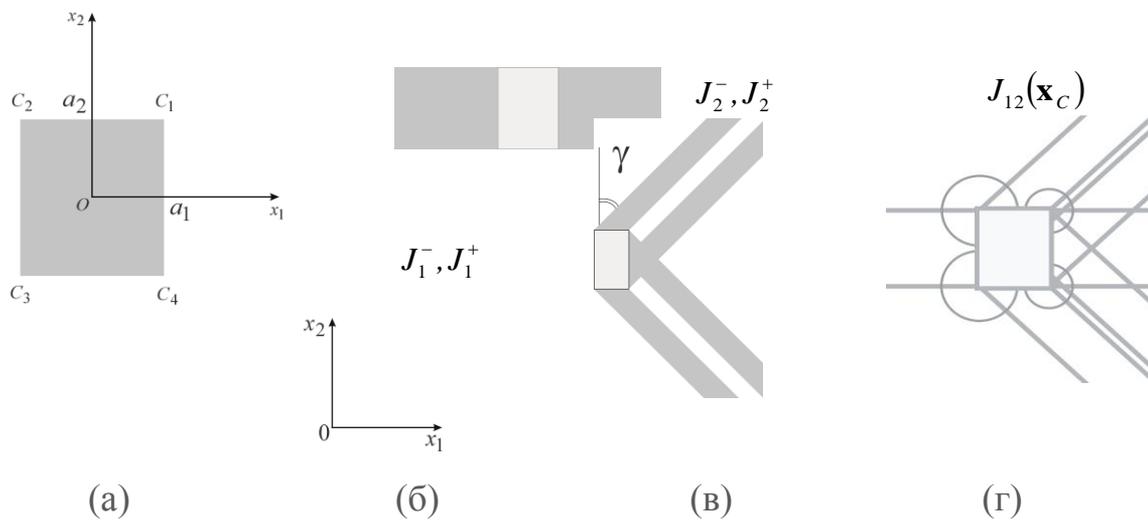


Рис. 5.

Между зонами располагаются узкие промежуточные области согласования асимптотик – пограничные слои. Примеры 2-х видов параболического погранслоя в угловых точках показаны на Рис.6а,б). Поперечный размер каждой из зон согласования сопоставим с длиной собственной волны. Поле в них описывается с помощью относительно простых специальных функций – интегралов Френеля. Уравнения пограничных слоев и представления поля в них получены в замкнутом виде.

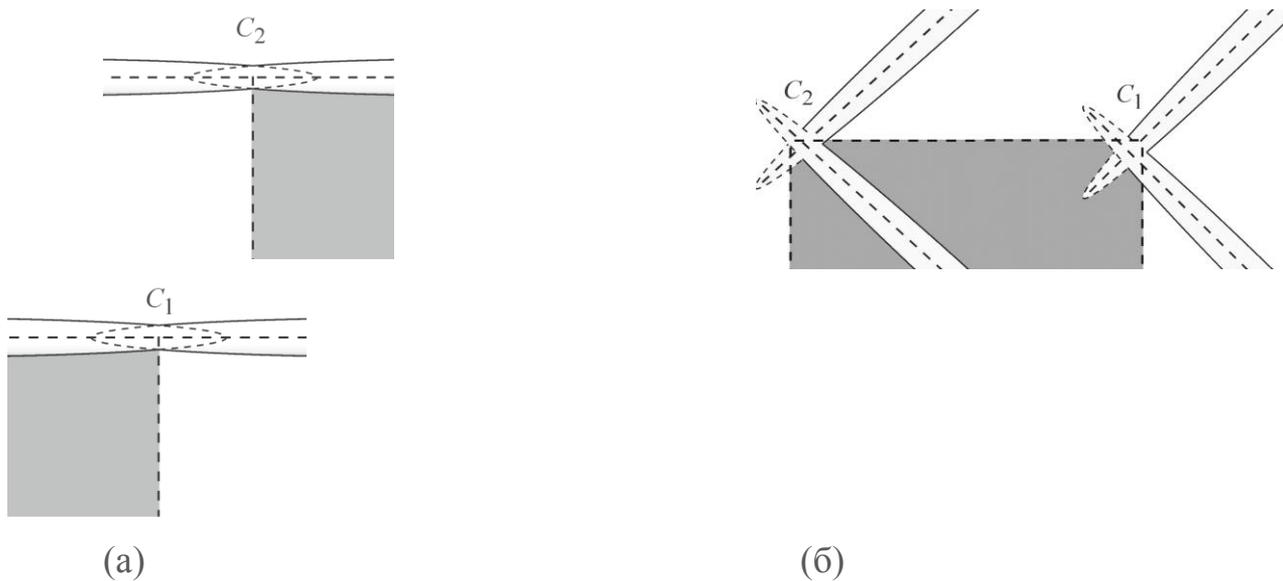


Рис. 6.

При расположении трансдюсера под прямым углом к поверхности  $\gamma = 0$  и расположение полос крестообразное.

При закритическом значении угла ( $\sin \gamma > 1$ ) наклонные полосы Рис. 5в и Рис 6б отсутствуют и главная часть излучаемого поля включает в себя: решения  $J_1^\mp$  (в продольной полосе Рис. 5б);  $J_{12}(\mathbf{x}_c)$  (цилиндрические волны, Рис. 5г) и решения в параболических пограничных слоях от каждой угловой точки, охватывающих границы продольной полосы (Рис. 6а).

Во всех случаях получены представления поля в замкнутом виде и получена оценка порядка асимптотической погрешности решения

$$J = J_1^- + J_1^+ + J_2^- + J_2^+ + O(k^{-5/2}) + \sum_{\{\mathbf{x}_c\}} J_{12}(\mathbf{x}_c) + O(k^{-3}).$$

На основании проведенного теоретического анализа в Проекте предложен алгоритм расчета излучаемого поля и комплекс программ расчета. При тестировании проводилось сравнение поля перемещений, полученного в замкнутом виде асимптотическими методами

$$\mathbf{U} = \sum \mathbf{U}_h^\mp + \sum \mathbf{U}_d^\mp + \sum_C \mathbf{U}_C, \quad (2.2)$$

с решениями, полученными прямым интегрированием представления (2.1) по области пятна контакта в различных точках наблюдения.

В первом тестировании проводился расчет поверхностной волны в частотной области для упругого материала (разновидность стали) с характерными скоростями продольной волны  $c_p = 5961$  м/с, поперечной волны  $c_s = 3211$  и волны Рэлея  $c = c_R = 2976.7$  на несущей частоте  $f = 3$  МГц при размерах трансдюсера  $2 \times 1$  см<sup>2</sup>. Характерная длина волны равна  $L = 0.99$  мм. Эффективный угол  $\gamma$  определяется для скорости в пластиковом проводящем клине  $c_s^{\text{in}} = 2350$  при угле падения  $\theta_s^{\text{in}} \approx 11^\circ$ . Интегралы (2.1) рассчитывались численно с помощью пакетов программ NAG (процедуры D01AKF) и

MAPLE, и по асимптотическим формулам (2.2). Типичные результаты сравнения приведены на Рис. 7а-в.

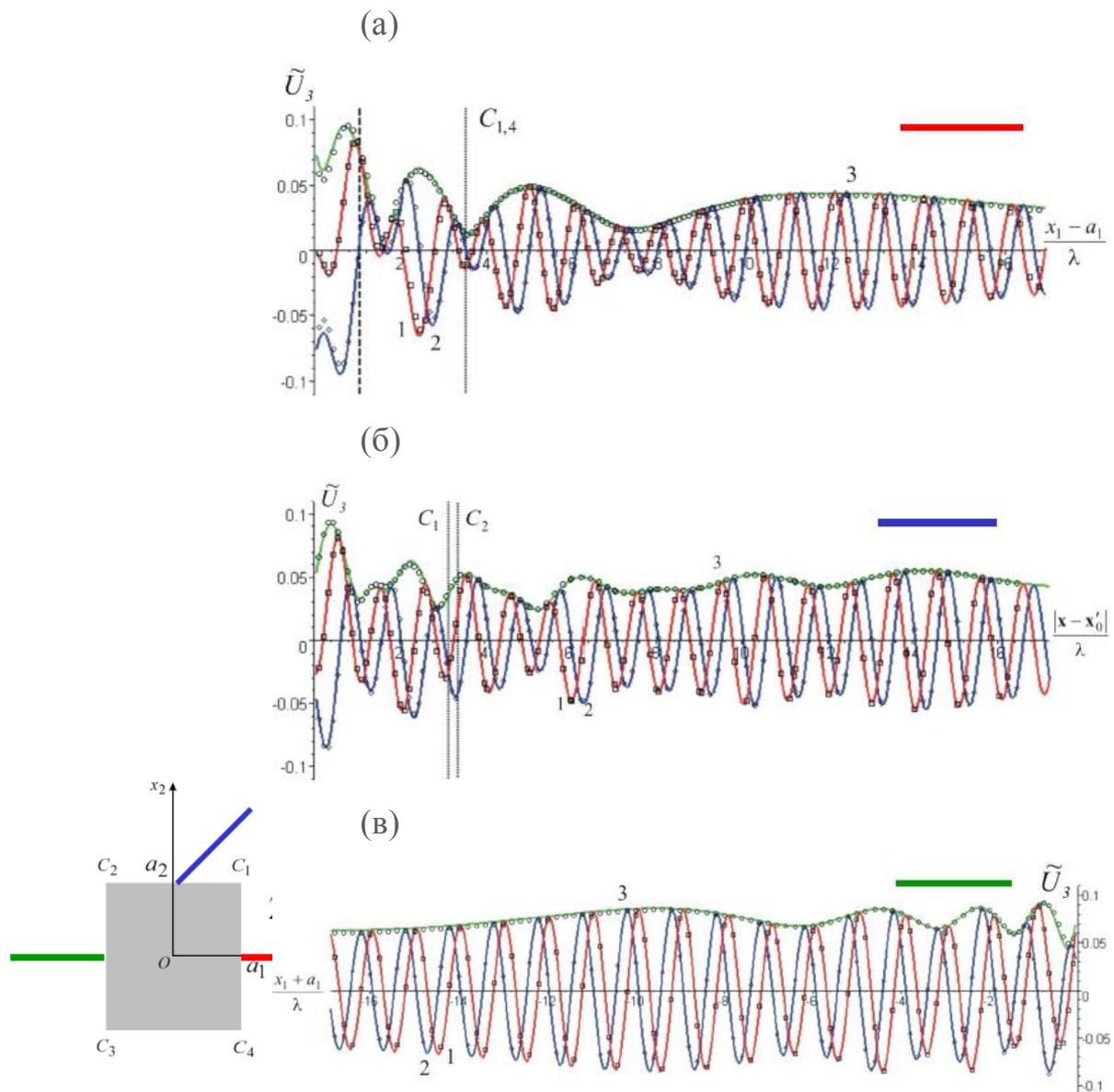


Рис. 7. Графики вертикальной скорости на поверхности «прозвучиваемого тела» вдоль оси  $x_1$  слева (а) и справа (в) от трансдюсера; и на оси наклонной полосы  $x_2 \geq 0$  (б).

*В реальной процедуре неразрушающего контроля в первую очередь регистрируются вертикальные скорости точек поверхности «прозвучиваемого» тела, поэтому именно эта скорость показана на Рис. 7.*

Кривая 1 отвечает вещественной части, кривая 2 – мнимой части и кривая 3 – модулю. Точками показаны результаты решения прямым численным методом. Для нескольких первых длин волн выбиралось по 10 точек на длину волны, затем шаг удваивался. Расстояния в полуполосах

отсчитывались от середины ближайшего ребра трансдюсера и нормировались на длину волны. На графике 7а вертикальная линия указывает границу наклонных погранслоев от угловых точек 1 и 4. Пунктиром показана ось погранслоя. На графиках 7в пограничные слои в этой области вклада не дают. На Рис. 7б для оси симметрии наклонной полуполосы указаны границы горизонтальных погранслоев от угловых точек 1 и 2. Скорости нормированы на отношение  $M(\omega)/\mu$  и в этом масштабе приведены в размерности мм/мкс.

Другой тест проиллюстрирован на Рис.8.

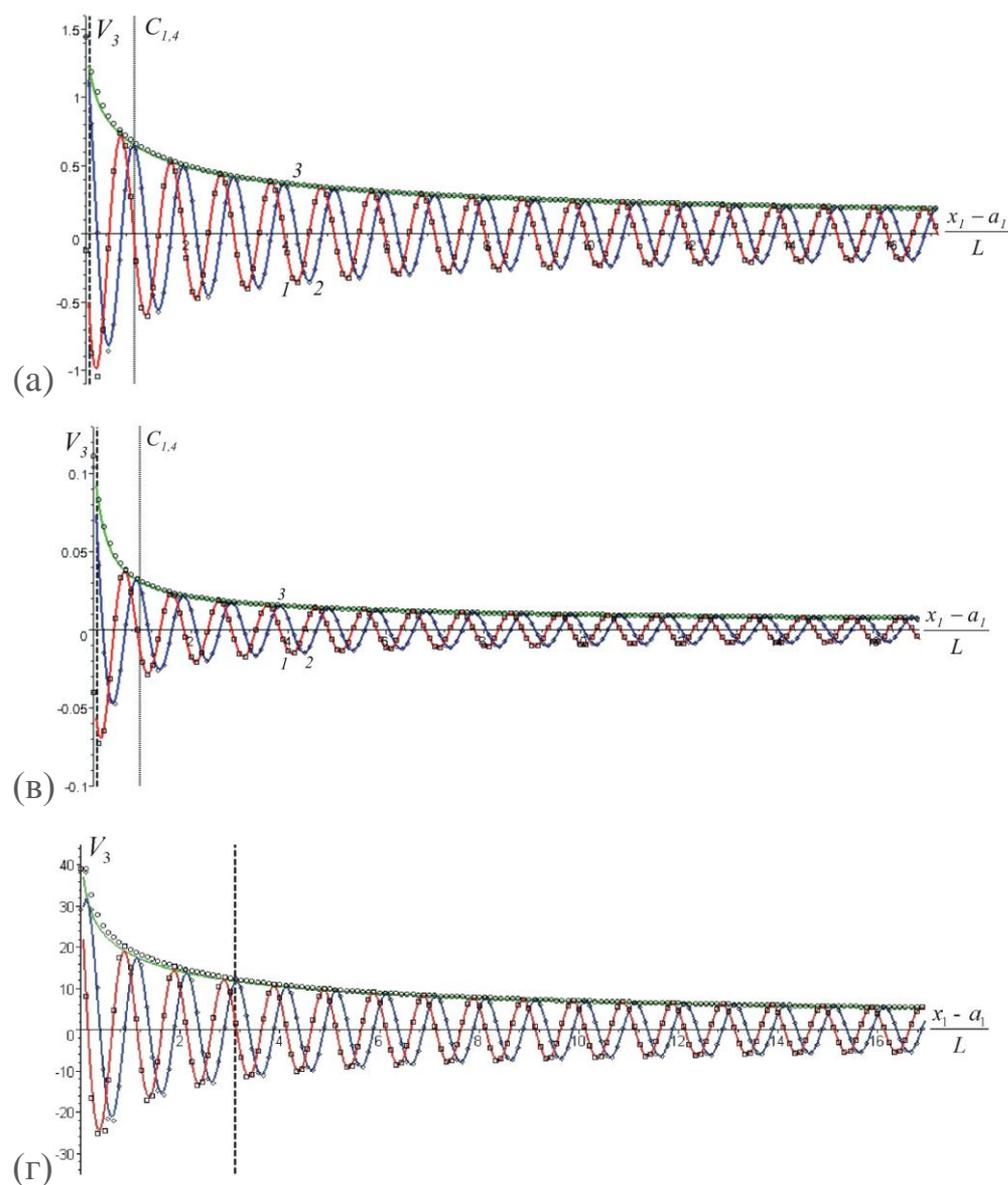


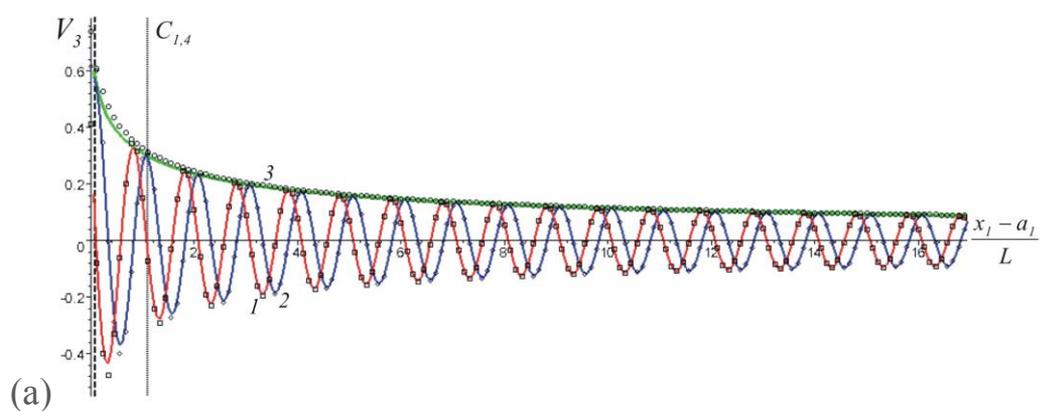
Рис. 8. Графики вертикальной скорости на лицевой поверхности пластины вдоль оси  $x_1$  справа от трансдюсера для мод S0 (а), A0 (б) и моды A1 (в) в окрестности ее частоты среза.

По результатам второго тестирования в той же шкале на Рис. 8 приведены графики вертикальных скоростей на поверхности трехслойной симметричной металлической плиты ( $c_p = 6330$  м/с,  $c_s = 3120$ ,  $\rho = 2820$  кг/м<sup>3</sup>, толщина  $H_1 = 16$  мм) с двумя симметричными покрытиями с каждой стороны ( $c_p = 2610$ ,  $c_s = 1100$ ,  $\rho = 1170$  кг/м<sup>3</sup>, толщина  $H_2 = 1$  мм). В данном тесте на частоте  $f = 0.16$  МГц имеются три распространяющиеся моды: S0 ( $c = 3617$  м/с,  $L \approx 22.6$  мм), A0 ( $c = 2738$ ,  $L \approx 17.1$ ), и A1 ( $c = 6499$ ,  $L \approx 40.6$ ).

Частота близка к первой частоте среза (моды A1), поэтому для этой моды фазовая скорость – наибольшая, а режим возбуждения – квазирезонансный. Волна длинная и с относительно малым волновым числом, поэтому погрешность асимптотики здесь несколько выше. Направления фазовой и групповой скорости одинаковы.

Если несущая частота сигнала далека от частоты среза, то возбуждение не является квазирезонансным и амплитуды скоростей имеют те же порядки, что и на Рис. 8(а, б).

Такой пример показан на Рис. 9, где толщины всех слоев в плите уменьшены вдвое при тех же прочих параметрах, угле падения и частоте. В этом случае существуют только две распространяющиеся моды – S0 ( $c = 5219.7$  м/с,  $L \approx 32.62$  мм) и A0 ( $c = 2457.5$ ,  $L \approx 15.35$ ).



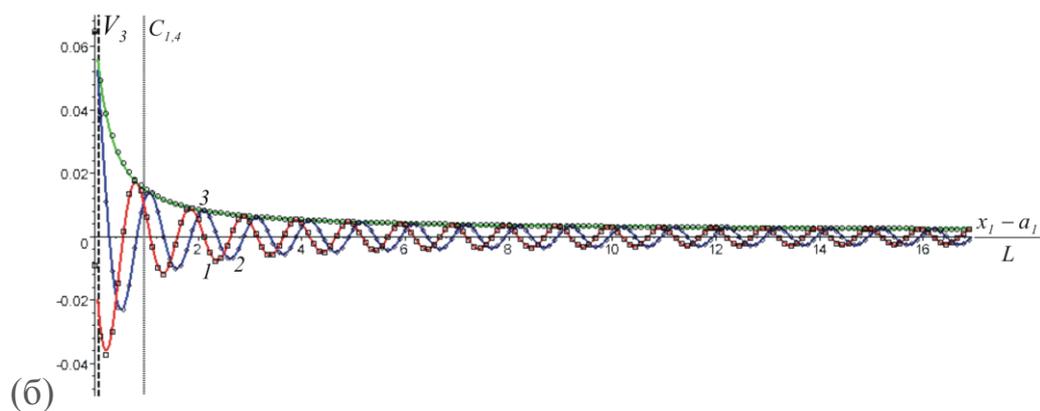


Рис. 9. Графики вертикальной скорости поверхности плиты на оси  $x_1$  справа от трансдюсера для мод S0 (а) и A0 (б).

Сравнение показывает удовлетворительную точность полученных асимптотик. Согласование с точным решением происходит, начиная с расстояния менее половины длины волны, но асимптотический метод оказывается намного быстрее и разница во времени счета превышает  $10^4$ . В частности, такое порядковое различие отмечалось на РС с двухядерными процессорами Intel и тактовой частотой порядка 3.5ГГц, а также на рабочей станции SUN, где прямой расчет для одной точки наблюдения занимал порядка 1.5мин.

Таким образом, практическое значение результатов п.II в том, что в отличие от существующих прямых численных методов для расчета генерируемого в элементе конструкции поля не требуется конечные элементы, сетки и т.д. В частотной области выявлен физический характер поля, выделены его главные компоненты и получено их эффективной представление в замкнутом виде. Результат удовлетворительной точности получается в в каждой геометрической зоне и разработанный в Проекте, на несколько порядков более быстрый, алгоритм может легко быть включен в любой из известных методов.

Часть результатов п.II изложена в виде отдельной публикации [4].  
Остальные результаты подготовлены к печати.

### III. Точная формулировка неотражающих краевых условий и задача сопряжения динамического поля в конечной области с полем в протяженном элементе конструкции

Следующий этап неразрушающего контроля состоит в получении «отклика» объекта на входной сигнал и анализ данных рассеянного поля для того, чтобы сделать выводы об остаточной прочности. Если для входного сигнала в области коротких волн кривизна формы объекта и особенности его геометрии малосущественны, то для рассеянного поля учет этих факторов принципиально важен. Как правило, наиболее «опасные» области представляют собой сочленения конструктивных элементов, области с неоднородностями, угловыми точками и пр., т.е. сравнительно небольшая часть объема элемента конструкции. Поэтому заявленный Проект предусматривал разработку специального теоретического «инструмента», позволяющего сосредоточить весь ресурс расчета на такой локальной области, контактирующей с остальной частью протяженного элемента конструкции. В нашем рассмотрении эта оставшаяся часть представлена одним или несколькими полубесконечными волноводами в виде полуполосы, полуцилиндра или трехмерной плиты с цилиндрическим вырезом (Рис.10а–в), что моделирует внешнюю часть элемента конструкции по отношению к технологическим узлам сложной формы. Примеры возможных геометрических конфигураций приведены на Рис.10г,д.

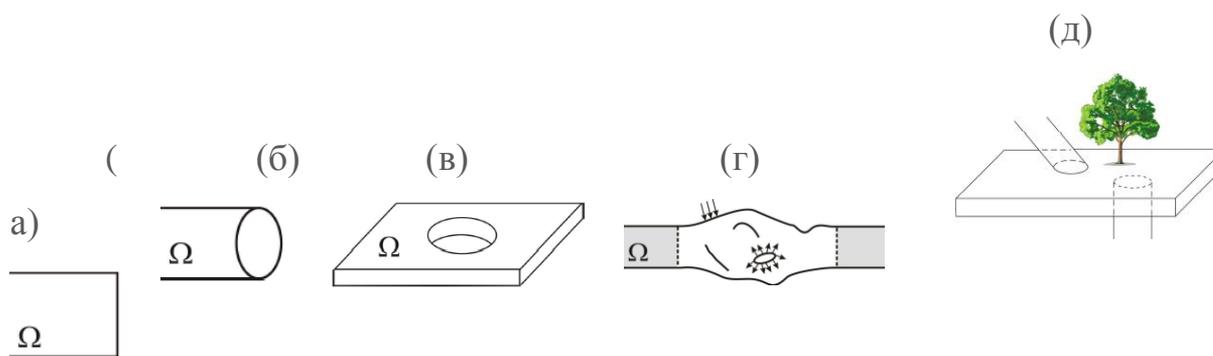


Рис. 10.

На общей границе локальной области и полубесконечного волновода ставятся условия непрерывности перемещений и напряжений, на лицевых поверхностях волновода – однородные граничные условия п.І.

Поле в волноводе представлено в виде суперпозиции СВ, вообще говоря со всевозможными направлениями распространения. На основании соотношений ортогональности п.І в замкнутом виде получены выражения для коэффициентов (амплитуд) волн через значения поля на общем сечении.

В предположении о наличии в волноводе «паразитных» волн с обратным направлением излучения следует на границе раздела локальной области и остальной протяженной части элемента конструкции поставить такие граничные условия, которые бы позволили полностью исключить наличие «паразитных» волн. Далее, задача решается отдельно для такой локальной области с дополнительными неотражающими граничными условиями на границе раздела.

1) Первый конструкционный элемент, для которого в Проекте были получены неотражающие условия – это слоистая несущая плита (см. п.І). При этом граница конечной области есть виртуальный цилиндр конечного радиуса, охватывающий исследуемый узел сл всеми неоднородностями. Основные результаты следующие.

Получена модальная формулировка условия излучения в общем сечении: равенство нулю выражений всех амплитуд

$$M_n^{l,cs} = 0, \quad (3.1)$$

паразитных волн для половины спектра  $k_l$  с противоположным направлением излучения. Формулировка использует счетное множество волновых чисел  $k_l$  для волн с PSV и SH поляризацией и в вычислительной практике требует редукции до их конечного количества  $N_r$ , с

соответствующей оценкой этого минимального количества и возникающей при этом погрешности условия излучения.

В частности, например при реализации метода конечных элементов (МКЭ) должен соблюдаться баланс числа степеней свободы  $N_d$ , количества уравнений для элементов в объеме области и прочих граничных условий  $N_d - N_r$ , и числа неотражающих граничных условий  $N_r = N_\phi \times N_m$ . Последние добавляют в матрицу МКЭ один блок – горизонтальную полосу, где ненулевые элементы отвечают лишь конечным элементам на границе раздела между областью и протяженной частью конструкции (Рис. 11а).

Дальнейшее исследование позволило предложить альтернативные формулировки, свободные от такой оценки числа  $N_r$ .

Неотражающие краевые условия удалось преобразовать к такому виду, что:

Условия формируются в каждой точке общего сечения;

Количество условий сокращено до 3-х;

Каждая формулировка использует интеграл взаимности (сокращенно обозначаемый  $RG$ ) вида

$$RG_S(\mathbf{u}^l, \mathbf{u}^m) = \sum_j \int_S \{ \sigma_{\alpha\beta}^l u_\alpha^m - \sigma_{\alpha\beta}^m u_\alpha^l \} n_\beta dS, \quad (3.2)$$

по поверхности  $S$  (для плиты – боковая поверхность виртуального цилиндра радиуса  $R$ ).

Три неотражающие условия имеют вид:

$$RG_S(\hat{\mathbf{u}}^{1,2,3}, \mathbf{u}) = 0,$$

и содержат компоненты искомого поля  $\mathbf{u}$  в конечной области по границе общего сечения  $S$  и одно из ядер  $\hat{\mathbf{u}}^{1,2,3}$ , получаемое из компонент тензора Грина для виртуального бесконечного волновода. Для трехмерной плиты поле  $\mathbf{u}$  трехмерно, но ядра удается свести к осесимметричным функциям, так что  $\hat{\mathbf{u}}^3$  отвечает реакции бесконечной плиты на

сосредоточенную *поперечную силу*  $T$ ,  $\hat{\mathbf{u}}^2$  – на сосредоточенный *крутящий момент*  $M_0$ , а  $\hat{\mathbf{u}}^1$  – реакции на сосредоточенный *плоский центр расширения* в продольном направлении некоторой интенсивности  $T_0$  (Рис. 11б). Неотражающие условия формулируются для всех точек приложения  $O_*$ , «пробегающих» боковую цилиндрическую поверхность некоторого радиуса  $R_* \leq R$ , или, в пределе  $R_* \rightarrow R-0$ .

Заметим, что сами ядра  $\hat{\mathbf{u}}^{1,2,3}$  представляются выражениями вида (1.11) с подстановкой соответствующей правой части в формулы  $M_n^l$ , т.е. предложенный формализм достаточно универсален.

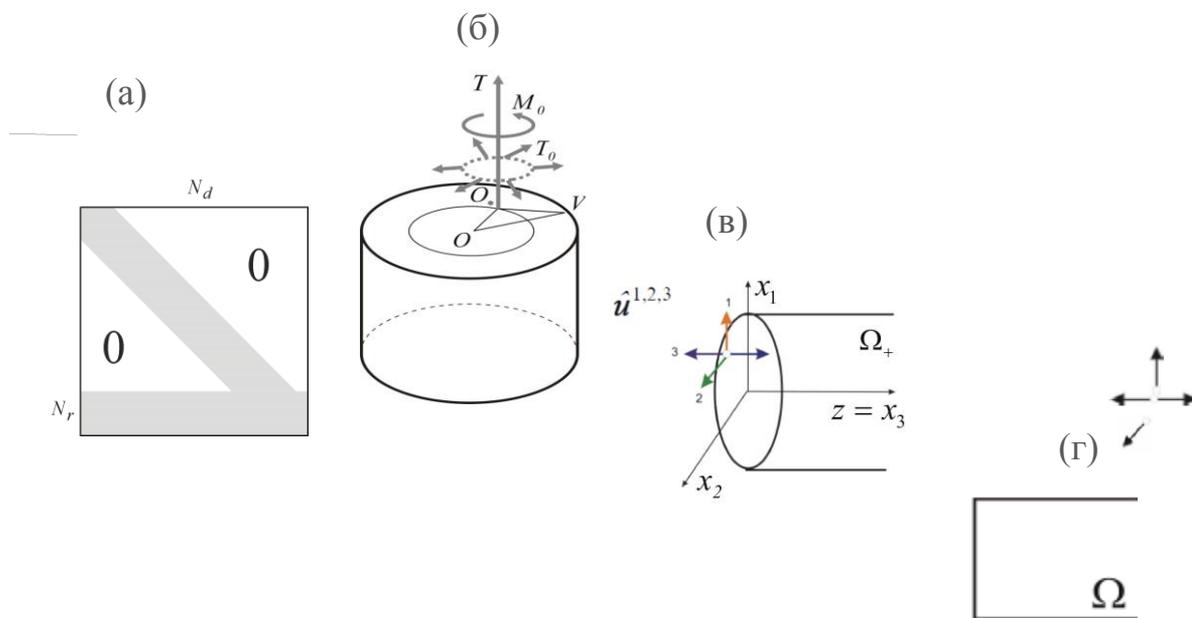


Рис. 11. (а) Скорректированная матрица МКЭ; (б)–(г) эффективные нагрузки для построения неотражающих граничных условий.

2) Второй конструкционный элемент, для которого в Проекте были получены неотражающие условия – это слоистый цилиндр (опора, колонна, балка и пр.). Основные п.1) сохраняют силу и для данной геометрической конфигурации. Неотражающие условия задаются как в модальном виде, аналогичном (3.1), так и с помощью 3-х видов эффективных нагрузок (3.2) (см. Рис. 11в). Интеграл взаимности берется по сечению цилиндра. Ядра  $\hat{\mathbf{u}}^1$  и  $\hat{\mathbf{u}}^2$  отвечают реакции бесконечного цилиндра на сосредоточенные силы,

приложенные и направленные в плоскости сечения, а ядро  $\hat{u}^3$  - реакции на *двойную силу*, ориентированную в направлении распространения волн.

Разумеется, здесь уже не появляется упрощений, связанных с осевой симметрией, кроме того волновые числа зависят от тригонометрических функций угловой координаты в сечении.

3) Третий конструкционный элемент, для которого в Проекте были получены неотражающие условия – это слоистая полоса (опора, балка и пр.). Основные идеи предыдущего параграфа работают и в этом случае, основные результаты аналогичны (3.1) и (3.2). Интеграл взаимности берется по сечению полосы, ядра  $\hat{u}^1$  и  $\hat{u}^2$  отвечают реакции бесконечной полосы на сосредоточенные силы, приложенные и направленные в плоскости сечения, а ядро  $\hat{u}^3$  - реакции на *двойную силу*, ориентированную в направлении распространения волн. Данный результат существенно проще, чем 1) и 2).

Таким образом, во всех рассмотренных случаях все влияние каждого присоединенного полубесконечного волновода на исследуемую область, представляющую интерес для неразрушающего контроля, *сведено к постановке выведенных неотражающих краевых условий* на границе раздела конечной области, примыкающей к волноводу данного типа.

Отметим два главных достоинства метода:

*Конечная область может иметь сложную геометрию*, в ней могут протекать *неупругие процессы* и единственным ограничением общности является *непрерывность перемещений и напряжений* на границе со слоистым упругим (или линейно вязкоупругим) волноводом, что позволяет моделировать элементы конструкций, технологические узлы и т.д. с существенным сокращением (на одно измерение) размерности задачи;

*Вспомогательные функции* – ядра  $\hat{u}^{1,2,3}$  в неотражающих краевых условиях определяются только структурой самого элемента конструкции, виртуально продолженного до бесконечности и ограниченного лишь лицевыми поверхностями. Выражения для вспомогательных функций находятся с помощью разложения по собственным волнам отклика бесконечного волновода на 3 вида вспомогательных нагрузок, и в принципе, не требуют другой формальной техники и предложенный метод обладает универсальностью. Сами вспомогательные нагрузки представляют собой сосредоточенные силы, моменты и двойные силы (диполи).

Таким образом, задача расчета динамического «отклика» элемента конструкции сложной формы, работающего в условиях локального нагружения, и соединенного с другими объектами протяженными волноводами «канонической» геометрии (плитами, балками, опорами, колоннами) может быть реализована следующим образом:

Сначала проведением виртуальных сечений выделяется конечная область для последующего расчета прямыми методами (конечных элементов, конечных разностей и т.д.);

Затем на сечениях ставятся неотражающие краевые условия п. III;

После чего численно решается краевая задача для конечной области с этими дополнительными условиями.

В такой постановке предлагаемая методика может быть включена в любой стандартный численный метод (МКЭ, метод граничных элементов, метод сеток).

В итоге получаемый результат расчета позволяет описать поле динамических перемещений и напряжений полностью, как в конечной области, так и в присоединенных волноводах.

Часть результатов п. III изложена в виде публикации [3, 5]. Остальные результаты подготовлены к печати.

## Заключение

Все основные этапы заявленного Проекта выполнены. Полученные результаты обладают новизной, оригинальностью и находятся на переднем крае достижений в данной области.

Практическое значение результатов состоит в их применимости к задачам неразрушающего контроля элементов конструкций, детектировании трещин и неоднородностей и оценке остаточной прочности.

С физической точки зрения, для основных видов рассмотренных задач выявлены главные компоненты исследуемого поля динамических перемещений и напряжений и для них найдены наиболее эффективные представления.

Результаты исследования позволили разработать новые методы и алгоритмы расчета динамического поля, создать комплекс программ и провести численное сравнение с существующими прямыми методами расчета.

Разработанные методы и алгоритмы обладают большой вычислительной эффективностью и быстродействием и позволяют существенно снизить размерность рассматриваемых задач без потери точности.

По результатам п. I-III сделан доклад на международной конференции Euromech Colloquim 540 “Advanced Modeling of Wave Propagation in Solids” (1–3 октября 2012г., Прага, Институт термомеханики Чешской академии наук) [2]. Часть результатов представлена в публикациях [1–5], вышли из печати [1–3]. Остальные результаты подготовлены к публикации.

Планируется продолжение работы в данном направлении, в котором основной акцент сделан на разработку общего метода расчета полных спектров комплексных волновых чисел элементов конструкций и его вычислительной оптимизации.

Автор благодарит Организаторов и Экспертов Фонда «Основание» за предоставленную возможность выполнить заявленную программу исследований.

## Литература

Захаров Д.Д. Свойство ортогональности и перенос энергии трехмерными собственными волнами в слоистых трансверсально-изотропных плитах при наличии или отсутствии контакта с жидкостью // Прикладная математика и механика. 2013. Т.77. Вып.1. С.57–73.

web-site: <http://pmm.ipmnet.ru/ru/>

*Англоязычный перевод издательства Elsevier:*

Zakharov D.D. The property of orthogonality and energy transfer by three-dimensional eigenwaves in transversely isotropic laminated plates with and without contact with a liquid // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2013. Vol.77. №1. P.39–50.

web-site: <http://www.sciencedirect.com/science/journal/00218928/77>

Zakharov D.D. Formulations of non-reflecting radiation conditions for the transversely isotropic layered strips, cylinders and plates using 3-D orthogonality of waves / Advanced Modelling of Wave Propagation in Solids /Eds. R. Kolman, A. Berezovski, M. Okrouhlik, J. Plesek/, Book of abstracts, EC540, 2012, Institute of Thermomechanics Czech Academy of Sciences, Prague. P.126–127.

web-site: <http://ec540.it.cas.cz/>

Захаров Д.Д. Тензор Грина и формулировка неотражающих граничных условий в упругих волноводах // Вестник МИИТа, 2012. №25. С.51–60.

Zakharov D.D. Short-wave asymptotics of SAW radiated by an angled beam and fluid coupled rectangular ultrasonic transducer // Journal of the Acoustical Society of America. 2013 (submitted).

Захаров Д.Д. Свойство ортогональности собственных волн и формулировка неотражающих граничных условий в полугораниченных упругих телах // Прикладная математика и механика. 2013 (сдано в печать).